UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO

POR:
CARMEN OTILIA RODRÍGUEZ QUIEL
9 – 700 – 538

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

VERAGUAS, REPÚBLICA DE PANAMÁ

JUNIO DE 2015

ST

Aprobado por:

José A. Camarena

Prof. José Camarena
Presidente

Jorge Hernandez

DR. Jorge Hernández
Miembro

Mgtr. Erick Hidalgo
Miembro

Mgtra. Giannina Núñez
Representante de la Vicerrectoría
De Investigación y Postgrado

Fecha: 05 DE JUNIO DE 2015

Obsequio

DEDICATORIA

De manera muy especial dedico esta investigación a mi hija **Paola Danish**, quien es mi fuente de inspiración y superación.

A mis padres **Francisco José y Otilia**, a quienes les debo mi vida y me dieron, en todo momento, una voz de aliento para que no desmayara en mi objetivo.

A ustedes: *los amo.*

AGRADECIMIENTO

Agradezco, ante todo, a **DIOS** por haberme concedido salud, sabiduría y disposición para ver realizado este proyecto

Mi profunda gratitud a mi asesor **José A Camarena B** , por sus atinadas direcciones, paciencia, esfuerzo y sacrificio, sin los cuales no hubiese sido posible la culminación de este trabajo

A mi hija y mis padres por la paciencia de compartir mi vida con mi trabajo y mis estudios

Gracias a todos.

CONTENIDO

DEDICATORIA iii

AGRADECIMIENTO v

CONTENIDO vii

LISTA DE FIGURAS xi

RESUMEN / SUMMARY xvi

INTRODUCCIÓN 1

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES 5

1 1 RASGOS HISTÓRICOS DE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO 6

1 1 1 **Surgimiento histórico del problema de investigación.** 6

1 1 2 **Las primeras funciones continuas y no diferenciables en punto alguno** 11

1 2 SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES 18

1 3 CONCEPTOS TOPOLÓGICOS BÁSICOS 23

1 3 1 **Espacios métricos** 23

1 3 2 **Espacio métrico completo** 28

1 3 3 **Espacio de Baire** 32

1 4 RELACIÓN ENTRE CONTINUIDAD Y DIFERENCIACIÓN 40

CAPÍTULO 2· FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO 46

2 1 EJEMPLOS DE FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN ALGUNOS PUNTOS 47

2 2 FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN UN CONJUNTO ENUMERABLE DE PUNTOS 52

2 3 FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN ESPACIO DE BAIRE 63

2 4 LA FUNCIÓN DE WEIERSTRASS 69

2 4 1 **Algunos casos particulares de la función de Weierstrass y Riemann** 76

CAPÍTULO 3· PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO 81

3 1 INTRODUCCIÓN 82

3 2 ASPECTOS HISTÓRICOS QUE SUSTENTAN LA PROPUESTA 83

3 2 1 **Del rigor geométrico al algebraico y aritmético** 83

3 2 2 **Epistemología de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno** 84

3 3 DISEÑO DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO 95

3 3 1 **Descripción de la propuesta** 95

3 3 2 **Construcción de una función continua en todo $\mathbb{R}$ pero no diferenciables en TODO $\mathbb{Z}$** 96

3 3 3 **Construcción de una función continúa en todo $\mathbb{R}$ pero no diferenciable en punto alguno** 99

3 3 4 **Funciones continuas y no diferenciables en punto alguno con *Mathematica*** 112

3 3 4 1 Comandos básicos de *Mathematica* para graficar funciones 113

3 3 4 2 Visualización gráfica de la continuidad y la no diferenciabilidad de funciones en un punto 117

3 3 4 3 La función de Weierstrass con *Mathematica* 122

3 3 4 4 La función de Riemann con *Mathematica* 127

3 3 4 5 La función de Van Der Waerden con *Mathematica* 133

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 152

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 155

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 1 Función de Bolzano 12

Figura 1.2 Curva poligonal quebrada construida segun Bolzano 13

Figura 1.3 Función de Riemann (x) 15

Figura 2.1 Función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 48

Figura 2.2 Función $f(x)=|x|$ 49

Figura 2.3 Función $Sng(x)$ 50

Figura 2.4 Función continua en todo $\mathbb{R}$ y no diferenciable en todo $\mathbb{Z}$ 57

Figura 2.5 Funcion contінúa de periodicidad dos (2) 58

Figura 2.6 Función continua de periodicidad uno (1) 59

Figura 2 7 Función continua de periodicidad un medio $\left(\frac{1}{2}\right)$ 59

Figura 2 8 Gráfica de la función g 62

Figura 2 9 Función $\Delta f\left(x,\frac{1}{4}\right)=|m|\geq\alpha$ 67

Figura 2.10 Función genérica con una cuspide 67

Figura 2.11 Función con dos cúspide y un abismo 68

Figura 2.12 Función con multiples cúspides y abismos 69

Figura 2.13 Primer término de la función de Weierstrass 77

Figura 2.14 Suma de los dos primeros términos de la función de Weierstrass 77

Figura 2.15 Suma de los cinco primeros términos de la función de Weierstrass 78

Figura 2.16 Suma de los dos primeros términos de la función de Riemann 79

Figura 2.17 Suma de los cinco primeros términos de la función de Riemann 79

Figura 2.18 Suma de los diez primeros términos de Riemann 80

Figura 3.1 Cuerda flexible tensada sobre el eje X 85

Figura 3.2 Cuerda flexible levantada en el punto medio M 85

Figura 3.3 Tensión de una curva en dirección de la recta tangente 87

Figura 3.4 Representación real de la cuerda tensada por el punto medio 93

Figura 3.5 Función genérica en dos partes 94

Figura 3.6 Función con cúspide sin derivada 97

Figura 3.7 Funcion de más cúspides y abismos sin derivadas 99

Figura 3.8 Función periódica $g(x)$ 100

Figura 3.9 Primer término de la función construida 101

Figura 3.10 Suma de los dos primeros términos de la función construida 103

Figura 3.11 Suma de los tres primeros términos de la función construida 105

Figura 3.12 Suma de los cuatro primeros términos de la función construida 109

Figura 3.13 Primeros cuatro términos de sumas parciales de la función construida 109

Figura 3.14 Suma de los cinco primeros términos de la función construida 110

Figura 3.15 Suma de los seis primeros términos de la función construida 110

Figura 3.16 Suma de los siete primeros términos de la función construida 111

Figura 3.17 Primeros siete términos de sumas parciales de la función construida 111

Figura 3.18 Primeros cuatro términos de la función construida 112

Figura 3.19 Función x^3-3x 114

Figura 3.20 Parábolas $y^2-x-1=0, \quad 2y^2-x-5=0$ 115

Figura 3.21 Función Diente de Serrucho 116

Figura 3.22 Función $|x|$ 117

Figura 3.23 Derivada de la función $|x|$ 118

Figura 3.24 Función $\sqrt[3]{x}$ 119

Figura 3.25 Derivada de la función $\sqrt[3]{x}$ 120

Figura 3.26 Función $\begin{cases} x^2-4, & \text{si } x<1 \\ 5x-8, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ 121

Figura 3 27 Derivada de la función $\begin{cases} x^2-4, & \text{si } x<1 \\ 5x-8, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ 122

Figura 3.28 Primer término de la función de Weierstrass 123

Figura 3.29 Segundo término de la función de Weierstrass 124

Figura 3.30 Tercer término de la función de Weierstrass 124

Figura 3 31 Suma de los dos primeros términos de la función de Weierstrass 125

Figura 3.32 Suma de los tres primeros términos de la función de Weierstrass 126

Figura 3.33 Suma de los ocho primeros términos de la función de Weierstrass 127

Figura 3.34 Primer término de la función de Riemann 128

Figura 3.35 Segundo término de la función de Riemann 129

Figura 3.36 Tercer término de la función de Riemann 130

Figura 3.37 Suma de los dos primeros términos de la función de Riemann 130

Figura 3.38 Suma de los cinco primeros términos de la funcion de Riemann 131

Figura 3.39 Suma de los diez primeros términos de la funcion de Riemann 132

Figura 3 40 Intervalo real $[k-1, k]$ 133

Figura 3 41 Primer término de la función de Van Der Waerden 136

Figura 3.42 Segundo término de la función de Van Der Waerden 138

Figura3.43 Primer y segundo término de la función de Van Der Waerden 138

Figura 3.44 Suma de los dos primeros términos de Van Der Waerden 140

Figura 3.45 Primer término y Suma de los dos primeros términos de Van Der Waerden 140

Figura 3 46 La función de Van Der Waerden de periodicidad dos 148

Figura 3 47 Suma de los dos primeros términos de la función de Van Der Waerden de periodicidad dos 149

Figura 3 48 Suma de los tres primeros términos de la función de Van Der Waerden de periodicidad dos 150

RESUMEN / SUMMARY

RESUMEN

En esta investigación se estudia la evolución epistemológica y la construcción de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, desde el surgimiento de los primeros ejemplos de estos tipos de funciones con los trabajos de grandes matemáticos como Bolzano, Riemann y Weierstrass, hasta algunas construcciones más recientes como es la función de Van Der Waerden

Este trabajo se realiza apoyado en el software Mathematica como un recurso tecnológico, para visualizar el comportamiento de los primeros términos de las referidas funciones, y presentar una propuesta de enseñanza de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, incorporando este saber en la formación de los licenciados en matemática de las universidades de Panamá

SUMMARY

In this research the epistemological development and construction of continuous and not differentiable at any point is studied, since the emergence of the first examples of these types of functions with the works of great mathematicians like Bolzano, Riemann and Weierstrass, until some latest constructions such as in Van Der Waerden function

This work was done with the support of the Mathematica software as a technological resource, to visualize the behavior of the first terms of the aforementioned functions, and to present a specific way of experiencing continuous and not differentiable at any point by incorporating this knowledge into the training of graduates in Mathematics from the Universities of Panama

INTRODUCCIÓN

Desde la formación recibida como Licenciada en Matemática, me llamó la atención el hecho de que se podía tener una función continua en un punto sin que exista su derivada, y siempre me pregunté ¿Será posible crear una función periódica que presente la misma característica anterior?, esta fue la primera motivación que me ha permitido decidir investigar sobre el tema "Funciones Continuas y no Diferenciables en punto alguno"

Es así que los primeros ejemplos tradicionales de las funciones continuas en el origen pero no diferenciable en este punto, son las siguientes

$$f(x) = |x|,$$

$$f(x) = x^{2/3}$$

Este hecho es fácilmente aceptable, puesto que la no existencia de la derivada es inmediata Sin embargo, pensar que una función sea continua en todo un intervalo y que no posee derivada en punto alguno no es una tarea fácil, en esta tesis se explorará tal situación

Esta obra está estructurada en tres capitulos, a saber

- Preliminares
- Funciones continuas y no diferenciables en punto alguno
- Propuesta de enseñanza de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno

En el primer capítulo se examinan situaciones importantes que, según una perspectiva epistemológica, condujeron al problema de investigación, un aspecto relevante sobre tal situación es el desarrollo del concepto de función, el cual se hace acompañar del de continuidad, esta situación motivó la creencia de que las funciones eran relaciones puramente continuas y, por ende, se penso que siempre era posible trazar una recta tangente sobre una curva continua

En este capítulo, además, se estudian algunos conceptos básicos para una mejor comprensión del tema, entre ellos aspectos referentes a espacios métricos, espacios topológicos y funciones definidas por series, como temas preliminares importantes se estudian los conceptos de continuidad y diferenciabilidad desde una perspectiva del análisis real, cabe señalar aquí que se estudian las relaciones existentes entre estos dos conceptos, puntualizando el teorema que establece que toda función derivable es continua, sin embargo, el recíproco de este teorema no siempre es verdadero

En el segundo capítulo se trata el tema central de este proyecto, **las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno**, sobre el cual muchos matemáticos han realizado aportes significativos, entre ellos Bolzano, Riemann y Weierstrass, quienes fueron los primeros en advertir la existencia de estos tipos de funciones que teniendo un comportamiento patológico eran rechazadas por otros matemáticos Utilizando como base los descubrimientos de éstos matemáticos, se analizan otras construcciones de funciones continuas y no diferenciables en un número enumerable de puntos

En el tercer capítulo se presenta la propuesta de enseñanza de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, el cual constituye uno de los legados más importantes que deja esta investigación, donde se destaca el hecho de abrir las puertas a la comprensión y análisis de estos tipos de funciones, y que los docentes de matemática de nuestra época no caigan en la misma forma errónea de pensamientos que se tenia antes del surgimiento de estas funciones

Esta situación es un punto medular, por la cual se recomienda implementar esta propuesta para la formacion de los licenciados en matemática en nuestro país Al respecto, se inicia con algunos aspectos históricos que favorecen el diseño e implementación de la propuesta, como lo es el carácter epistemológico de las funciones continuas y no diferenciables en donde se analiza el problema de la Cuerda Vibrante, el cual trae consigo, precisamente, el tipo de función que hoy nos ocupa

La propuesta no se centra en presentar un modelo de enseñanza de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, sino más bien se pretende ofrecer un recurso didáctico y bibliográfico con el cual el docente y estudiante puedan interactuar en los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema Sin embargo, este material académico que se presenta podria facilmente ser adaptado como un modelo de enseñanza de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno apoyado con el *Software Mathematica*

La idea central de la propuesta es, en primera instancia, analizar la epistemología de las funciones continuas no diferenciable en punto alguno y, posteriormente, a partir de la construcción de una función continua y no diferenciable en un numero enumerable de puntos, se puede llegar a la construcción de una función continua y no diferenciable en punto alguno

Se espera que este proyecto sirva de apoyo tanto a los estudiantes, como profesores de Matemática de la Universidad de Panamá, en el estudio de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno Más aun, se espera que pueda servir como bases académicas para que los investigadores interesados en el tema puedan ampliar los horizontes de estos tipos de funciones que tienen un comportamiento patológico, y a la vez, sea la antesala para el estudio de los fractales

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES.

1.1 RASGOS HISTÓRICOS DE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO.

En esta sección se examinan situaciones importantes como el desarrollo del concepto de función y el de continuidad, los rasgos historicos de las funciones continuas y no diferenciales en punto alguno, sucesiones y series de funciones, algunos conceptos de topología y la relación entre continuidad y diferenciacion, elementos considerados para el buen desarrollo del estudio del tema en cuestión

1.1.1 SURGIMIENTO HISTÓRICO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

La historia de la Matemática ha demostrado que los conceptos matemáticos más importantes no germinan de una manera totalmente acabada y, por el trabajo, de un solo matemático o grupo de investigadores matemático, sino que al trascurrir los intentos por resolver problemas y por el trabajo de muchos matemáticos en distintas épocas, los conceptos van tomando forma y desarrollándose evolutivamente, segun las exigencias y necesidades de las situaciones problémicas que enfrentan

Es asi, que éstas caracteristicas en la epistemología de la clase de funciones continuas y no diferenciables en punto alguno han quedado bien marcadas, más aun cuando éstas nacen entrelazadas con dos conceptos matemáticos muy importante, como lo son función y limite

El problema de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno ha sido estudiado por un gran numero de matemáticos e historiadores de la matemática, entre los que se puede citar a Pascal, Brunschvicg, Pasch y

Hawkins, pero éstos han realizado un estudio histórico muy breve, tal vez por el nivel patológico que involucra el problema (Medvedev, 1991)

Al respecto, Hernández, J PhD (2014) de nacionalidad panameña, señala en una entrevista, que la continuidad es el alma del Análisis Real y siendo el Cálculo Diferencial e Integral la antesala de esta ciencia, entonces la continuidad se convierte en un concepto central en el estudio de ambas disciplinas

Un resultado proporcionado en los cursos de Análisis Matemático es el referido a la existencia de funciones continuas y no diferenciables en punto alguno (Delgadillo Piñón & López De Luna, 2008), en este proyecto se analiza profundamente este resultado desde la perspectiva de diversos matemáticos que a través de la historia han realizado significativos aportes sobre el tema

Antes de 1850 se manejó la idea de que las funciones continuas tenían derivadas, tal imprecisión se entiende en parte, por la muy pobre noción que se tenía en esa época sobre los conceptos de continuidad y diferenciabilidad de una función y, en especial, sobre el mismo concepto de función

En las primeras etapas del desarrollo del Cálculo, las relaciones entre variables eran casi siempre continuas La continuidad queda reflejada en una gráfica, como lo muestra Oresme en sus trabajos de las series geométricas En general, solo se consideraban funciones analíticas que, naturalmente, eran continuas

Con el desarrollo del concepto de función, durante el siglo XIX, en las obras de Fourier, Cauchy, Bolzano y otros matemáticos, se inicia a considerar la continuidad como una propiedad que puede o no tener una funcion

El descubrimiento de funciones que en ningún punto tienen derivada y que representan fenómenos de difusión, mostró de manera contundente que el estudio de la continuidad separada de otras propiedades, pero íntimamente relacionadas, como la derivabilidad y la integrabilidad, no era un mero afán de realizar abstracciones, sino que eran necesidades reales planteadas al desarrollo del Cálculo a través de sus vinculaciones con las ciencias físicas

Si una función es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$, entonces parece lógico pensar que en cada punto existiría la pendiente de la recta tangente a la curva de su gráfico, es decir, existiría su derivada, o bien, al menos se podría pensar que no existe tal pendiente en algunos puntos donde la recta tangente sea vertical

El Problema es **¿Cómo construir funciones continuas y no diferenciables en punto alguno?**

Desde el punto de vista de la Matemática Pura, el problema consiste en comprender y analizar la patología de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno Sin embargo, desde el punto de vista de la Transposición Didáctica el problema es cómo poner en escenario educativo la construcción de funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, sin que ambos conceptos, el de continuidad y el de diferenciabilidad, pierdan valor didáctico en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática

Se reitera que hasta antes de 1850 la idea de que las funciones continuas eran diferenciables excepto, a lo más, en un número finito de puntos, estaba completamente aceptada Por ejemplo, en el texto de Cálculo de J L Raabe, titulado *Die Differential – Und Integralrechning*, publicado en 1839, la afirmación anterior aparece como un teorema (Iommi, 2011)

Es más, en 1806 un célebre teorema de A M Ampere demuestra analíticamente que una función continua tiene derivadas, tal desvarío se entiende en parte por la muy imprecisa noción que se tenía entonces de lo que es una función, y que toma su forma moderna a partir del trabajo sobre series de Fourier (Grabinsky, 1997)

En 1861 Riemann propuso la función $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sen(n^2 x)}{n^2}$, en una conferencia, esta función es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$, pero no es diferenciable en los puntos irracionales, resultado que fue probado por Hardy en 1916 (Brito, 2011)

Sin embargo, para la función de Riemann existen infinitos puntos racionales donde la función es diferenciable, de manera tal que esta función no representa la función que se quiere analizar en ésta propuesta

En 1872, Karl Weierstrass envió un articulo a la Academia de Ciencias de Berlín dando el primer ejemplo de una función continua y no diferenciable en punto alguno, al respecto, dice Robert Bartle, 1989, "*Weierstrass sacudió al mundo matemático al dar un ejemplo de una función que es continua en cualquier punto pero cuya derivada no existe en esos puntos*" (Balaguer, 2009)

Lutzen escribio en la obra "*A History of Analysis*", que la función de Weierstrass contradecía la idea intuitiva de la mayor parte de sus contemporáneos, señalando que las funciones continuas eran diferenciables excepto en puntos especiales (Balaguer, 2009) En el referido articulo Weierstrass probó que la función definida por

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \, Cos(a^n \pi x),$$

donde a $\in \mathbb{N}$ es impar, b $\in$ (0, 1) y ab > 1 + $\frac{3\pi}{2}$, es continua en toda la recta real y no diferenciable en punto alguno

En el problema de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, una de las primeras interrogantes que se trataron de resolver es que

Dada una función f definida en un intervalo, será posible encontrar otra función φ de modo que exista alguna conexión de diferenciabilidad entre esta y la primera (Medvedev, 1991)

Precisamente la respuesta fue expresada por la siguiente ecuacion diferencial

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \varphi(x)$$

La existencia del miembro izquierdo implica la existencia de la funcion derivada φ de la función dada f

Los procedimientos practicos que conllevaba el cálculo de la derivada durante los siglos XVII y XVIII se convirtió en la convicción de que, en general, cada función tiene una derivada en todas partes excepto en puntos concretos (Boyer, 2010)

Muchos matemáticos pensaban que si una función era continua, entonces ella era derivable Esta forma de pensamiento quedó evidenciada por cada uno de ellos en afirmaciones o resultados al respecto, entre los cuales se pueden mencionar a

- Lagrange en 1777, era uno de los que creia que toda función continua era diferenciable excepto para ciertos valores particulares, compartiendo la misma opinión se encontraban matemáticos como Ampere quien realizó grandes aportes con relación a las funciones continuas no diferenciables (Brito, 2011)

- André Marie Ampere en 1806, presentó un teorema en el que demuestra analíticamente que una función continua tiene derivada (Grabninsky, 1997)

- Cauchy en 1814, precisa los conceptos de límite, función y continuidad apoyados en una intuición geométrica que le permitió creer que las funciones eran exclusivamente relaciones continuas, pero esta forma de pensamiento sufre un duro golpe más tarde, cuando se demostró que hay funciones continuas sin derivadas, es decir, curvas sin tangentes (Boyer, 2010)

- Poinsot en 1815, escribió que la relación entre dos cantidades del mismo tipo no depende ni de la naturaleza ni de sus valores absolutos, dice, por la definición misma de la relación de las cantidades $(\Delta x, \Delta y)$ siempre tiene un límite, y es precisamente la existencia de una curva y su tangente, que en efecto esta ultima es la derivada (Boyer, 2010)

1.1.2 LAS PRIMERAS FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO.

Bernhard Bolzano (1781 –1848), en su memoria de 1817, titulada "*Demostración puramente analítica del teorema entre dos valores cualesquiera que dan dos resultados de signos opuestos se encuentra al menos una raíz real de la ecuación*", presentó definiciones rigurosas de la función continua y de la derivada de una función además, emite una concepción clara de las relaciones que unen la continuidad y la diferenciabilidad de una función (Collete, 1993)

Es así, que Bolzano, en su obra titulada "*Théorie des fonctions*" (Teoria de funciones), separa el concepto de continuidad del de derivabilidad, esto lo hace cuarenta (40) años antes que Weierstrass, subrayó que la derivada de la función

f no es un cociente de ceros o de cantidades evanescentes, sino un número hacia el que se aproxima el cociente (Collete, 1993)

Bolzano distingue entre función continua y función diferenciable, cosa que Cauchy no hizo porque creyó durante toda su vida que una función continua era siempre diferenciable (Collete, 1993)

EJEMPLO 1 1 Bolzano construyó geometricamente el pnmer ejemplo de una función continua en un intervalo cerrado, que no era diferenciable en punto alguno, esto lo realizó de la siguiente manera

Sea AB un segmento de recta y M su punto medio Se divide AM y MB en cuatro partes iguales (ver la figura 1 1) Sean A_3 y B_3 las reflexiones de A_3 y B_3 , respectivamente, por un espejo La linea quebrada $A\,A_3\,M\,B_3\,B$ sobre la que se aplica el mismo proceso de subdivisión de AB , proporciona dieciséis (16) segmentos de rectas Continuando este proceso indefinidamente, el conjunto de líneas quebradas converge hacia una curva que representa una función continua la cual no es diferenciable en punto alguno

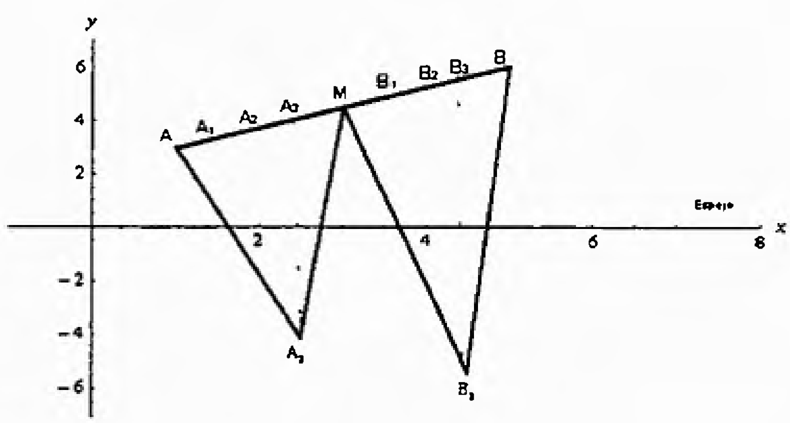

Figura 1.1 Función de Bolzano

Si se continúa con el proceso de subdivisiones que sugiere Bolzano se llega a que las rectas quebradas convergen describiendo una curva poligonal, como la que se muestra en la siguiente figura.

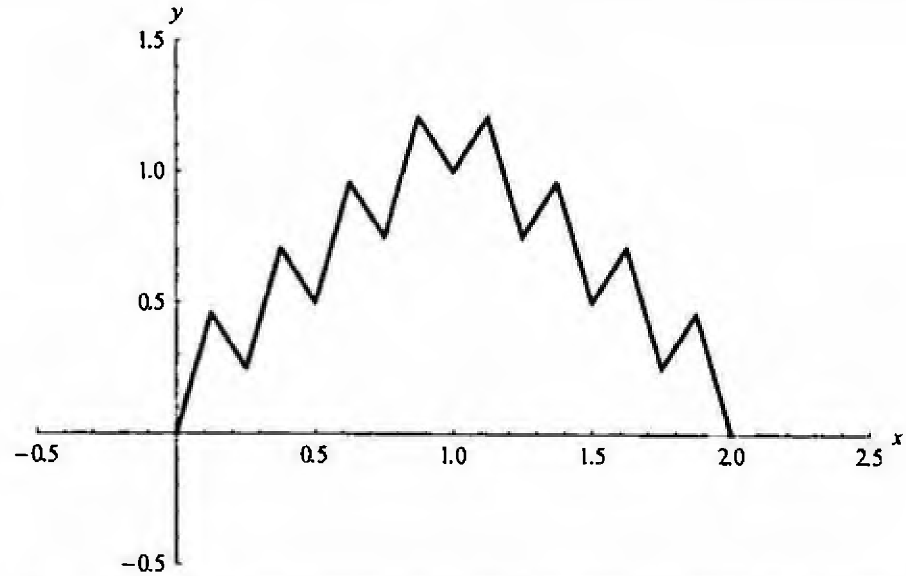

Figura 1.2 : Curva poligonal quebrada construida según Bolzano

Bernhard Riemann (1826 –1866), es a quien se le debe la primera distinción entre la continuidad y la diferenciabilidad, ya que a pesar de que Bolzano lo había hecho en 1834, incluso presentó el ejemplo anterior mucho antes que Riemann, pero por el hecho de que sus obras se lograron conocer hasta finales del siglo XIX, pierde la oportunidad de ser el principal gestor de este tipo de funciones.

EJEMPLO 1.2: En una memoria escrita por Riemann, presenta un ejemplo de una función continua no diferenciable, de la siguiente manera.

Sea (x) una función que denota la diferencia entre x y el entero más próximo, y sea $(x) = 0$ si x está a mitad de camino entre dos enteros. Entonces $-\frac{1}{2} < (x) < \frac{1}{2}$.

Sea ahora la función $f(x)$ definida mediante

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

La serie converge para todo valor de x Sin embargo, para $x = \frac{p}{2n}$ donde p es un entero primo con n , la función $f(x)$ es discontinua, con un salto cuyo valor es $\frac{\pi^2}{8\,n^2}$, para cualquier otro valor de x , la función $f(x)$ es continua

Además, $f(x)$ es discontinuo un número infinito de veces en cualquier subintervalo

Por otra parte, la función $f(x)$ es integrable y su integral

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

es continua para todo x, pero no es diferenciable en los puntos en los que $f(x)$ es discontinua

Este ejemplo de la función continua no diferenciable de Riemann no fue publicado hasta 1868, algunos años antes de que Weierstrass presentara su función continua no diferenciable en punto alguno, de la cual veremos algunos aspectos históricos posteriormente

Analicemos como se genera la gráfica de la función (x) dada por Riemann, como sigue

Sea n un número entero, entonces por definición

$$(x) = x - n,$$

donde n es el entero más próximo a x, claramente esta es una recta de pendiente uno (1), de manera que

- Cuando $x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, se tiene que $(x) = x$ y $x\left(-\frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
- Cuando $x \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, se tiene que $(x) = x - 1$ y $x\left(\frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{3}{2}\right) = 0$
- Cuando $x \in \left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$, se tiene que $(x) = x + 1$ y $x\left(-\frac{3}{2}\right) = x\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Continuando con este proceso, se identifica que la gráfica de esta función es la función periódica en forma de dientes de sierra, la cual se muestra en la siguiente figura

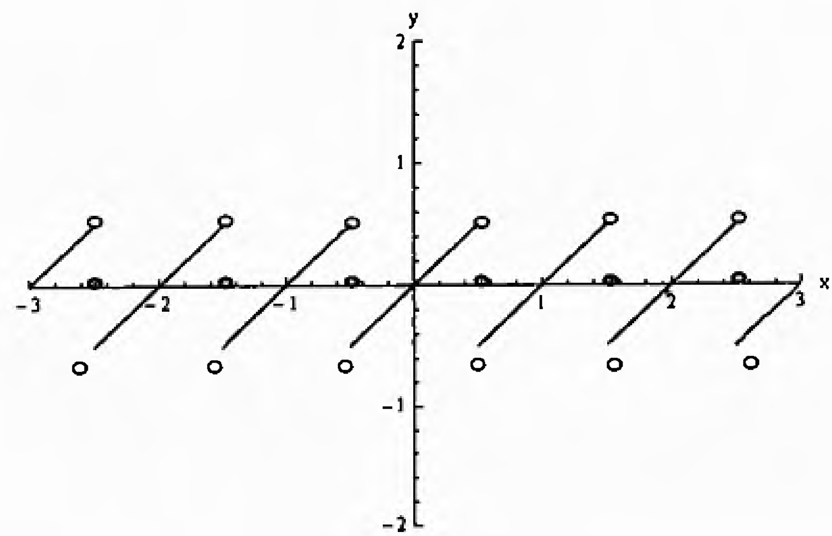

Figura 1.3 Función de Riemann (x)

La función (x) también puede ser definida de la siguiente manera

$$(x) = \begin{cases} x - n\,, & \text{si } |x - n| < \dfrac{1}{2} \\ 0\,, & \text{si } x = n + \dfrac{1}{2} \end{cases}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

Entonces la función de Riemann

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2},$$

tiene sus discontinuidades en los puntos racionales de la forma $\frac{a}{2b}$ donde a y b son primos entre sí, es decir, $mcd(a, 2b) = 1$, éstos números son densos en toda la recta real

Por otro lado, se sabe que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, de manera que el salto que hace la función en la discontinuidad es $f^-\left(\frac{a}{2b}\right) - f^+\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{\pi^2}{8b^2}$, (1)

pero $f(x)$ está acotada por $\frac{\pi^2}{6}$ y es integrable, ya que sus discontinuidades son enumerables

La función $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ resulta ser continua

$$|F(x + h) - F(x)| \leq \int_h^{x+h} |f(t)|\, dt \leq \frac{\pi^2}{6} h$$

Pero carece de derivada, precisamente en los puntos $\frac{a}{2b}$, ya que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{a}{2b}}^{\frac{a}{2b}+h} f(t)dt = f^-\left(\frac{a}{2b}\right)$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_{\frac{a}{2b}}^{\frac{a}{2b}+h} f(t)dt = f^+\left(\frac{a}{2b}\right)$$

Como (1) prueba que $f^{-}\left(\frac{a}{2b}\right) \neq f^{+}\left(\frac{a}{2b}\right)$, queda garantizado que $f(x)$ no es diferenciable en este punto

A pesar de que las funciones continuas no diferenciables de Bolzano y Riemann se presentaron anteriores a la función de Weierstrass, éstas no llamaron la atención de los matemáticos de su época, no es hasta 1872 que se presenta la célebre función de Weierstrass, entonces los matemáticos se plantearon un nuevo y complejo examen de los fundamentos del análisis

Adicional a los retos que exigía la prueba de la no diferenciabilidad de estas funciones, el surgimiento de las mismas llega a sacar del error que muchos matemáticos tenían internalizado, el cual consistía en que "si una función era continua entonces ella era diferenciable, y de no ser diferenciable seria en una cantidad insignificantes de puntos"

EJEMPLO 1.3: La célebre función de Weierstrass se define como sigue

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{n} Cos\,(a^{n}\pi\, x),$$

donde x es una variable real, a es un entero impar mayor que uno , b es una constante positiva menor que uno y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$

La sucesión de funciones que define la serie de Weierstrass es uniformemente convergente y define de esta forma una funcion continua

La prueba de la no derivabilidad de esta función será tratada en el segundo capítulo

Éste asunto de tener una función continua en todos los números reales, pero que no sea derivable en punto alguno, precipito la crisis que engendró la construcción del sistema de los numeros reales, y, por otro lado, desafiaba el ingenio y creencia de los matemáticos, tanto así que Hermite decía *"Me alejo con espanto y horror de esta plaga lamentable de funciones continuas que no tienen derivada"* (Brito, 2011, p 117)

1.2 SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

DEFINICIÓN 1.1· Una sucesión de funciones es una aplicación que a cada número natural n hace corresponder una función f_n Se usa el símbolo $\{f_n\}$ para representar la sucesión de funciones dada por $n \to f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

DEFINICIÓN 1.2 Dado $x \in A$ se dice que la sucesion de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente en x , si la sucesión de numeros reales $\{f_n(x)\}$ es convergente

DEFINICIÓN 1.3: Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ se llama uniformemente convergente hacia la función f en un conjunto A si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que si $n \geq N$, entonces se tiene que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ se puede formar otra sucesion $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de $\{f_n\}$, es decir, se forma la sucesión de sumas parciales de la sucesión dada, como sigue

$$F_1 = f_1, F_2 = f_1 + f_2, F_3 = f_1 + f_2 + f_3, \quad , F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

La sucesión $\{F_n\}$ definida de esta forma se llama serie de término general de f_n y se representa por

$$\sum_{n\geq 1} f_n$$

TEOREMA 1.1. Si la sucesion $f_n\ A \to \mathbb{R}$ converge uniformemente hacia $f\ A \to \mathbb{R}$ y cada f_n es continua en $a \in A$, entonces el limite f también lo es En particular, si las funciones f_n son continuas en todo punto, el limite uniforme f también lo es

Demostración

Por la convergencia uniforme de $\{f_n\}$, se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in A$ se cumple $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ Por la continuidad de f_n en a, existe un $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ y $x \in A$, entonces se tiene que

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Luego, se tiene que

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)|$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

es decir, se tiene que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ siempre que $|x - a| < \delta,\ x \in A$, lo cual concluye la prueba ■

TEOREMA 1.2 (Condición de Cauchy para la convergencia uniforme) Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en A, si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un numero natural n_0 tal que para todo $m, n \geq n_0$, se verifica que

$$sup\{|f_m(x) - f_n(x)|\ \ x \in A\} \leq \varepsilon$$

Demostración

Supóngase que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función f, entonces dado $\varepsilon > 0$ existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq n_0$, se tiene que

$$sup\{|f_m(x) - f(x)| \quad x \in A\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $n,m \geq n_0$ Luego, para todo $x \in A$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \\ &= |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon , \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

Por tanto, para todos $m , n \geq n_0$, se verifica que

$$sup\{|f_m(x) - f_n(x)| \quad x \in A\} \leq \varepsilon$$

Recíprocamente, supóngase que se verifica que para todo $x \in A$, la sucesión de funciones satisface la siguiente condición

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq sup\{|f_m(x) - f_n(x)| \quad x \in A\} \leq \varepsilon$$

Entonces, por el teorema de completitud de $\mathbb{R}$, la sucesión $\{f_n(x)\}$, es convergente Por lo tanto, podemos definir la funcion limite puntual $f\ A \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \text{ para todo } x \in A$$

Probemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función f en A

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$, se tiene que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in A$$

Fijando $x \in A$ y $m \geq n_0$ en esta desigualdad y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos que $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, desigualdad que es válida para todo $x \in A$ Se Deduce que $sup\{|f_m(x) - f(x)|\ x \in A\} \leq \varepsilon$ siempre que $m \geq n_0$ Se ha probado así que $\{f_n\}$ converge uniformemente en A ∎

TEOREMA 1.3 (Criterio de Weierstrass) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones y A un subconjunto, tal que para todo $x \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f_n(x)| \leq U_n$, donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ es convergente

Entonces para todo $x \in A$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente hacia la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Demostración

Por el criterio de comparación de series, por la desigualdad $|f_n(x)| \leq U_n$ y al ser $\sum_{n\geq 1} U_n$ convergente, se deduce que $\sum_{n\geq 1} | f_n(x) |$ converge para todo $x \in A$, esto implica que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge para todo $x \in A$

Probemos que esta convergencia es uniforme

En efecto, como la serie $\sum_{n\geq 1} U_n$ es convergente, entonces ella cumplirá la condición de Cauchy, esto es dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siendo $m, n \geq n_0$, entonces se tiene

$$\left|\sum_{k=1}^{m} U_k - \sum_{k=1}^{n} U_k\right| = \sum_{k=n+1}^{m} U_k < \varepsilon$$

Se deduce que para todo $x \in A$ se verifica que

$$|F_m(x) - F_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} U_k < \varepsilon$$

Como esta desigualdad es válida para todo $x \in A$, se sigue que

$$sup\{|F_m(x) - F_n(x)| \quad x \in A\} \leq \varepsilon,$$

es decir, la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme ■

1.3 CONCEPTOS TOPOLÓGICOS BÁSICOS.

Este apartado presenta los conceptos topológicos básicos como espacios metricos, espacios métricos completos, espacios topológicos y espacio de Baire, los cuales resultan de gran utilidad para una mejor comprensión del tema

1 3 1 ESPACIOS MÉTRICOS.

Un espacio métrico es un conjunto no vacío X sobre el cual se puede hablar de la distancia entre sus puntos, pero esta funcion distancia debe satisfacer algunas propiedades especiales, como se ve en la siguiente definicion

DEFINICIÓN 1.4· Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, una métrica o distancia sobre X es una función $d \;\; X \times X \to \mathbb{R}$, que verifica las siguientes propiedades

1 Positividad Para cada $x,y \in X$, $d(x,y) \geq 0$

2 Propiedad de separación Dados $x,y \in X$, $d(x,y) = 0$ si y sólo si, $x = y$

3 Simetría Para cada $x,y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$

4 Desigualdad triangular Para todo $x,y,z \in X$, es $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

La expresión $d(x,y)$ se lee "distancia de x a y", y el par (X,d) se denomina ***Espacio Métrico.***

Se señala que todo conjunto M no vacio, provisto de una función $d \;\; M \times M \to \mathbb{R}$ tal que esta función satisfaga las cuatro (4) condiciones de la definición anterior, se denominará espacio métrico

DEFINICIÓN 1.5: Sea (X, d) un espacio métrico y r un número real tal que $r > 0$ Se llama

1 ***Bola abierta*** de centro en $a \in X$ y radio r, al conjunto definido por

$$B(a, r) = \{x \in X \quad d(a, x) < r\}$$

2 ***Bola abierta punteada o reducida*** de centro en $a \in X$ y radio r, al conjunto definido por

$$\overset{o}{B}(a,r) = \{x \in X \quad 0 < d(a,x) < r\}$$

3 ***Bola cerrada*** de centro en $a \in X$ y radio r, al conjunto definido por

$$B(a, r) = \{x \in X \quad d(a, x) \leq r\}$$

4 ***Esfera*** de centro en $a \in X$ y radio r, al conjunto definido por

$$S(a, r) = \{x \in X \quad d(a, x) = r\}$$

DEFINICIÓN 1.6: Sea (X, d) un espacio métrico Un punto a $\in X$ se llama punto interior de un conjunto $A \subset X$ si existe una bola abierta $B(a, r)$ tal que se satisfaga que $B(a, r) \subset A$ El conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto A se denotará por $\overset{o}{A}$, o simplemente, $int(A)$

DEFINICIÓN 1.7: Un subconjunto A de un espacio métrico X se llama abierto si todos sus puntos son puntos interiores, es decir, A es un conjunto abierto si para todo $x \in A$ existe una bola abierta $B(x, r) \subset A$

DEFINICIÓN 1 8: Sea (X, d) un espacio métrico Un punto $a \in X$ se llama punto de acumulación o punto límite de un conjunto A si para cada $r > 0$, se satisface que la intersección entre la bola punteada de centro en a y radio r con el conjunto A es siempre distinta del vacio, es decir, a es punto de acumulacion de A si se satisface que $\overset{o}{B}(a,r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$

Al conjunto de los puntos de acumulación del conjunto A se representará por A', algunos autores se refieren a este conjunto como el derivado de A

DEFINICIÓN 1.9: Un subconjunto A de un espacio métrico X se llama cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación

DEFINICIÓN 1.10: Sea (X, d) un espacio métrico Si $A \subset X$, la clausura o adherencia de A, denotada $\overline{A}$, es el conjunto definido por $\overline{A} = A \cup A'$

DEFINICIÓN 1.11: Sea (X, d) un espacio métrico Un conjunto A se llama denso en X si se satisface que $\overline{A} = X$, es decir, A es denso si su clausura coincide con el espacio métrico X

DEFINICIÓN 1.12: Sea (X, d) un espacio métrico Un conjunto A se llama nada denso en X si se satisface que $X - \overline{A}$ es denso

Las proposiciones que siguen son clásicas de ejemplos de conjuntos densos En la primera se prueba la densidad de los números racionales $\mathbb{Q}$ sobre los reales $\mathbb{R}$, es decir, se prueba que entre dos números reales cualesquiera siempre es posible insertar un número racional, de manera que si este proceso se continúa infinitamente por medio de una sucesión creciente o decreciente se puede concluir que los numeros reales dados son puntos de acumulaciones de estas sucesiones y, por lo tanto, la unión de $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{Q}'$ coincide con $\mathbb{R}$

PROPOSICIÓN 1.1: El conjunto de los numeros racionales $\mathbb{Q}$ es denso en el espacio de los números reales $\mathbb{R}$

Demostración

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ dos numeros cualesquiera Sin pérdida de generalidad, supóngase $x < y$ de donde $y - x > 0$, y, sea $1 \in \mathbb{R}$, por la propiedad arquimediana se tiene que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n(y-x) > 1, \text{ de donde } y - x > \frac{1}{n}, (1)$$

Sea $p \in \mathbb{Z}$ la parte entera de nx, entonces se sigue que

$$p \leq nx < p + 1,$$

de donde se obtiene

$$\frac{p}{n} \leq x, (2) \quad \text{y}$$

$$x < \frac{p+1}{n}, (3)$$

Aplicando las relaciones (1), (2) y (3), se tiene que

$$y = x + (y - x) > \frac{p}{n} + \frac{1}{n} = \frac{p+1}{n} > x,$$

de donde se obtiene que

$$x < \frac{p+1}{n} < y$$

Finalmente, como $\frac{p+1}{n} \in \mathbb{Q}$ queda probado que entre los dos números reales x e y existe un racional, por tanto hay infinitos racionales ■

PROPOSICIÓN 1.2: $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

Demostración

Probemos que entre cada dos reales existe un irracional, por tanto hay infinitos irracionales

En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$, sin pérdida de generalidad, supóngase que $x < y$, entonces por la propiedad de la relación de orden, se tiene que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}},$$

por la proposición anterior existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que se satisface que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}},$$

de donde se obtiene que $x < \sqrt{2}\,r < y$, siendo $\sqrt{2}\,r$ un número irracional, queda hecha la prueba ∎

DEFINICIÓN 1 13: Sea (X, d) un espacio métrico Una aplicación $f \quad X \to X$ se llama contractiva si existe un número real $k \in (0,1)$ tal que se satisface

$$d\big(f(x), f(y)\big) < kd(x, y)$$

DEFINICIÓN 1 14: Sean (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios métricos La aplicación $f \quad X \to Y$ es uniformemente continua si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de modo que para cada $x, y \in X$ tal que $d_1(x, y) < \delta$, se verifica que

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$$

PROPOSICIÓN 1 3· Sea (X,d) un espacio métrico Cualquiera aplicación contractiva f de X en X es uniformemente continua

Demostración

Suponga que $f \quad X \to X$ es una aplicación contractiva, entonces por la definicion 1 13 se tiene que para cada $x,y \in X$ es $d\big(f(x),f(y)\big) < kd(x,y)$, (1), siempre que $k \in (0,1)$

Luego, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ y bajo la hipótesis de que $d(x,y) < \delta$, el resultado (1) queda expresado de la siguiente manera

$$d\big(f(x),f(y)\big) < kd(x,y) < k\left(\frac{\varepsilon}{k}\right) = \varepsilon$$

Esto prueba que siendo $d(x,y) < \delta$, se verifica que $d\big(f(x),f(y)\big) < \varepsilon$ Lo cual permite concluir que cualquier aplicación contractiva es uniformemente continua ■

1.3.2 ESPACIO MÉTRICO COMPLETO.

DEFINICIÓN 1.15: Sea (X,d) un espacio métrico Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, se llama de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m,n \geq N$ es $d(x_m , x_n) < \varepsilon$, es decir, los términos de la sucesión se acercan entre sí a medida que los índices crecen

DEFINICIÓN 1.16: Un espacio métrico (X,d) se llama completo, si toda sucesión de Cauchy en X es convergente a un punto de X

En los espacios métricos completos se puede investigar si una sucesión es convergente sin la necesidad de calcular su límite

PROPOSICIÓN 1.4: Cada sucesión convergente es una sucesión de Cauchy

Demostración

Suponga que (X,d) es un espacio métrico y que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de X convergente hacia un punto $x \in X$. Entonces, si $\varepsilon > 0$ existe un natural N_1 tal que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ siendo $n > N_1$

Análogamente, si $\varepsilon > 0$ existe un natural N_2 tal que $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ siendo $m > N_2$

Por la desigualdad triangular se tiene que

$$d(x_m, x_n) < d(x_m, x) + d(x, x_n),$$

de manera que $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, es decir, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, se sigue que una sucesión convergente tiene la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ siempre que $m, n \geq N$, esto prueba que la sucesion es de Cauchy ■

El recíproco de la proposición anterior no es verdad, o sea, que en general no es verdad que cada sucesión de Cauchy sea convergente

Por ejemplo, si $X = (0,1]$ y d es la métrica usual para $\mathbb{R}$ relativa a X, entonces en el espacio métrico (X,d) la sucesion $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$x_n = \frac{1}{n},$$

es una sucesión de Cauchy que no es convergente en tal espacio

PROPOSICIÓN 1.5: La recta real $\mathbb{R}$ con la metrica usual es un espacio metrico completo

Demostración

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesion de Cauchy en $\mathbb{R}$ Se prueba primero que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada En efecto, sea $\varepsilon = 1$, como por hipotesis $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, se sigue que existe un natural N tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, es decir, $|x_n - x_m| < 1$ siempre que $m, n \geq N$

Por lo tanto, por la desigualdad triangular se tiene que $|x_n| \leq 1 + |x_m|$ para $n \geq m$ Si se hace $M = sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{m-1}|, |x_m|\}$, se sigue entonces que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto prueba que la sucesión es acotada

Por otro lado, aplicando el teorema de Bolzano – Weierstrass que establece que una sucesion acotada de números reales tiene una subsucesión convergente, se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posé una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$

Se dice que esta subsucesión converge a $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces para $\varepsilon > 0$ existen naturales N_1 y N_2 tales que $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $m, n \geq N_1$ y $|x_{n_k} - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre $k \geq N_2$

Sea $N = máx\{N_1, N_2\}$ y tomemos $n \geq N$, fijemos un $k \geq N$, entonces se tiene que

$$|x_n - x_0| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de donde se tiene que $|x_n - x_0| < \varepsilon$, esto implica que la sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x_0 \in \mathbb{R}$ ■

DEFINICIÓN 1 17: Sea (X, d) un espacio métrico Se define la coleccion τ de subconjuntos de X por $\tau = \{A \subset X \; tal \; que \; A \; es \; abierto\}$

PROPIEDADES 1.1: En todo Espacio Métrico se verifican las siguientes propiedades

1 El vacio $\emptyset$ es abierto

2 El espacio métrico X es abierto

3 La unión de una colección de abiertos es un conjunto abierto

4 La intersección de un número finito de abiertos es un abierto

Inspirado en las propiedades anteriores, se da la siguiente definición

DEFINICIÓN 1.18. Sea X un conjunto y $\tau \subset 2^X$, subconjunto de partes de X, τ se llama una topologia sobre X si satisface los siguientes axiomas

T.1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$

T 2) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos tales que $A_i \in \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

T.3) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ es una colección finita de elementos, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau$

En este caso se dice que el par (X, τ), (o simplemente X) es un Espacio Topológico

Los elementos de τ se llaman τ – Abiertos (o simplemente Abiertos)

1 3 3 ESPACIO DE BAIRE

Se necesita considerar el espacio de funciones continuas con la métrica uniforme, cuyo dominio es un espacio métrico completo e imagen un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, siendo este un espacio de Baire, se pude entonces probar la existencia de funciones continuas de valor real con dominio en el intervalo $[0,1]$ y no derivable

DEFINICIÓN 1.19: Sea (X,τ) un espacio topológico Se dice que X es un espacio de Baire, si dada cualquier colección numerable $\{A_n \ \ n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos cerrados de X donde $int(A_n) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \emptyset$

Otra forma de definir los espacios de Baire es la siguiente Un espacio topológico es de Baire si la intersección de cualquier colección numerable de conjuntos abiertos y densos, es un conjunto denso

Esta noción fue introducida por el matemático francés René Louis Baire durante los primeros años del siglo pasado, la cual expreso en términos de lo que él denominó conjuntos de segunda categoría, ha encontrado en los últimos años un gran número de aplicaciones en distintas teorías de Matemática (Delgadillo & López, 2008)

René Louis Baire (1874 – 1932)

TEOREMA 1.6 (Punto Fijo de Baire) Si (X,d) es un espacio métrico completo y $f \ \ X \to X$ es una aplicación contractiva, existe un único punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$

Demostración

Se selecciona un punto $x_0 \in X$ y se define la sucesión iterativa $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ por recurrencia de la siguiente manera

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Notese que

$$x_1 = f(x_0),$$

$$x_2 = f(x_1) = f\big(f(x_0)\big) = f^2(x_0),$$

$$x_3 = f(x_2) = f\big(f^2(x_0)\big) = f^3(x_0)$$

$$x_n = f^n(x_0)$$

Para cada $x \in X$, al ser $f \quad X \to X$ contractiva, se tiene que

$$d\big(f^n(x), f^{n-1}(x)\big) < k\, d\big(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)\big) < \quad < k^{n-1} d(f(x), x),$$

donde, como se ha visto anteriormente, $f^n(x)$ denota el punto obtenido al aplicar f, n veces a x Como $k \in (0,1)$ se deduce que la sucesión $\{x_n = f^n(x)\}$ es de Cauchy y por tanto converge a $x_0 \in X$

Como f es una función continua se tiene que $\{f(x_n) = f^{n+1}(x)\} \to f(x_0)$, pero al ser $\{f(x_n) = f^{n+1}(x)\}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, se tiene que

$$x_0 = f(x_0)$$

Finalmente, si existiera otro punto fijo para f, supongase y_0, se tendría que se debe satisfacer que

$$x_0 = f(x_0) \text{ y } y_0 = f(y_0),$$

luego, aplicando la contractibilidad de f y al ser $k \in (0,1)$, se tiene

$$d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) < k\, d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0),$$

esto es imposible, lo cual indica que la existencia de otro punto fijo es falsa De manera que queda probada la unicidad del punto fijo de Baire ■

DEFINICIÓN 1.20. Sea un espacio métrico (X, d) Un conjunto $A \subset X$ se dice de primera categoría o magro, si se puede escribir como unión enumerable de conjuntos nada densos Y se dice de segunda categoría, si no es de primera

TEOREMA 1.7: Si (X, d) es un espacio métrico completo, cualquier conjunto de primera categoría tiene interior vacío

Demostración

Sea $A \subset X$ un conjunto de primera categoría y $\{F_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ la familia de conjuntos nada denso tal que $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$ Suponga por el absurdo que

$$int(A) \neq \emptyset$$

Sea $x_1 \in int(A) - \overline{F_1}$, el cual existe por ser F_1 nada denso y $int(A)$ un abierto no vacío, como $int(A) - \overline{F_1}$ es abierto existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$B[x_1, \varepsilon_1] \subset int(A) - \overline{F_1} \subset int(A) - F_1$$

Suponga que para $k = 1, 2, 3, .., n-1$ se han obtenido bolas cerradas tal que: $B[x_k, \varepsilon_k] \subset int(A) - F_k$, donde $x_k \in int(A) - \overline{F_k}$ y $\varepsilon_k < \frac{1}{2}\varepsilon_{k-1}$.

Sea ahora $x_n \in B(x_k, \varepsilon_k) \cap int(A) - \overline{F_n}$, que existe por ser F_n nada denso y $int(A)$ un abierto no vacío, como $B(x_k, \varepsilon_k) \cap int(A) - \overline{F_n}$ es abierto, existe un $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}$ tal que:

$$B[x_k, \varepsilon_k] \subset int(A) - \overline{F_n} \subset int(A) - F_n.$$

La familia $\{B[x_n, \varepsilon_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia enumerable de cerrados encajados cuyo diámetro tiende a cero (0), y por la completitud de (X, d) la intersección se reduce a un punto $\{x_0\} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B[x_n, \varepsilon_n] \subset int(A)$. Por construcción, $x_0 \notin F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, $x_0 \notin A$ para lo cual es absurdo, pues se tiene que $x_0 \in int(A)$. ■

TEOREMA 1.8: Sea X un espacio topológico. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. X es de Baire.
2. Para todo $A \subset X$, con $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde $int(\overline{A_n}) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que el conjunto $X - A$ es denso.
3. Dada cualquier colección enumerable $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos y densos de X, el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso en X.
4. Sea G un conjunto abierto y no vacío en X. Si se tiene una colección numerable $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de X, con $int(\overline{A_n}) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que $G \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Demostración

(1) ⇒ (2) Tome un $A \subset X$ tal que $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $int(\overline{A_n}) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se demostrara que $X - A$ es denso En efecto, puesto que por hipótesis X es de Baire, se tiene que $int(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}) = \emptyset$, es decir, $X - \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}$ es denso De aquí, y como se tiene que

$X - \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subset X - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X - A$, se concluye que $X - A$ es denso ∎

(2) ⇒ (3) Considere una colección numerable $\{U_n \ \ n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos y densos de X Para cada $n \in \mathbb{N}$, se el cerrado $A_n = X - U_n$ Como cada U_n es denso, se tiene que $int(A_n) = \emptyset$

De la hipótesis se tiene que $X - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es denso y como se tiene que

$X - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, de manera que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso en X ∎

(3) ⇒ (4) Suponga por el absurdo que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ Luego, existe un abierto $G \subset X$ con $G \neq \emptyset$ y una colección numerable $\{ U_n \ \ n \in \mathbb{N} \}$ de subconjuntos de X con $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ donde $int(\overline{A_n}) = \emptyset$

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = X - \overline{A}$ Es claro que cada U_n es un conjunto abierto y denso en X

Por hipótesis se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es un conjunto denso en X

Observe que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(X - \overline{A_n}\right) = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$$

Por otro lado, como $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$, tenemos que $G \bigcap \left(X - \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \right) = \varnothing$, lo cual es una contradicción Por consiguiente, $G \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ■

(4) ⇒ (1) Sea $\{A_n \ \ n \in \mathbb{N}\}$ una colección enumerable de conjuntos cerrados de X, tal que $int(A_n) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y supongase que $int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \varnothing$

Luego, existe un abierto no vacio $G \subset X$ para el cual $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y por lo tanto se tiene que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G \bigcap A_n)$ Además, como se tiene que

$$\text{Int}(\overline{G \cap A_n}) \subset Int\ (\overline{A_n}) = Int\ (A_n) = \emptyset\ ,$$

Obtenemos $int(\overline{G \cap A_n}) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice la hipótesis ■

EJEMPLO 1.6: Para cada $m \in \mathbb{Z}$, Considere $U_m = \{n \in \mathbb{Z} \ \ n > m\}$ Observe que se tiene $U_m \cap U_m = U_m$ si $m \geq m'$

De aquí se desprende que la colección

$$E = \{U_m \ \ m \in \mathbb{Z}\}$$

Es una base para una unica topología τ en $\mathbb{Z}$ Probemos que $(\mathbb{Z},\tau)$ no es un espacio de Baire En efecto, para ello, sea $A_m = \mathbb{Z} \setminus U_m$, con $m \in \mathbb{Z}$

Note que cada A_m es un conjunto cerrado y, dado que todo A_m está acotado superiormente, también es válida la igualdad $Int\ (A_n) = \emptyset$, de modo que $\{A_m \ \ m \in \mathbb{Z}\}$ es una colección numerable de cerrados con interior vacío en$\mathbb{Z}$

Dado que $\mathbb{Z} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} A_m$, se sigue que el teorema 1 8 nos indica que $(\mathbb{Z},\tau)$ no es un espacio de Baire ■

EJEMPLO 1.7: Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los numeros racionales con la topología heredada de $\mathbb{R}$ Como $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}}\{q\}$, se sigue que $\mathbb{Q}$ es una unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío En virtud al teorema 1 8 (4) se concluye que $\mathbb{Q}$ no es un espacio de Baire

Recuerde que un espacio métrico (X,d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente Además, el diámetro de un subconjunto $A \subset X$, denotado por $diám(A)$, es definido por $diám(A) = sup\{d(x,y) \ \ x,y \in A\}$, siempre y cuando el supremo exista, en caso contrario hacemos $diám(A) = \infty$

TEOREMA 1.9 (Teorema de Cantor) un espacio métrico (X,d) es completo, si y sólo si, toda sucesión decreciente $F_1 \supset F_2 \supset$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X , tal que $diám(F_n) \to 0$, tiene intersección no vacía

TEOREMA 1.10 (Teorema de Baire) Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire

Demostración

Sea X un espacio métrico completo y considere una colección $\{A_n \ \ n \in \mathbb{N}\}$ numerable de subconjuntos cerrados de X, para $Int(A_n) = \emptyset$

De acuerdo al teorema 1 8, debemos probar que $Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \varnothing$ Para ello tome un conjunto abierto U no vacio de X y se verificará que $U \not\subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

Como $Int(A_n) = \emptyset$, se tiene que el abierto $U \cap (X \setminus A_1)$ es no vacío, ya que $(X \setminus A_1)$ es abierto y la intersección de abierto es abierta

Sea $x_1 \in U \cap (X \setminus A_1)$, dado que X es un espacio regular, podemos encontrar un número positivo $r_1 < 1$ tal que $B[x_1, r_1] \subset U \cap (X \setminus A_1)$, o bien, $B[x_1, r_1] \subset U$ y $B[x_1, r_1] \cap A_1 = \emptyset$

Ahora bien, debido a que $Int(A_2) = \emptyset$, el abierto $B[x_1, r_1] \setminus A_2$ es no vacío, y por lo tanto se puede tomar un elemento $x_2 \in B[x_1, r_1] \setminus A_2$

Nuevamente en virtud de la regularidad de X , se obtiene que

$$B[x_2, r_2] \subset B[x_1, r_1] \setminus A_2 \text{ , para algun } 0 < r_2 < \frac{1}{2}$$

O de forma equivalente

$$B[x_2, r_2] \subset B[x_1, r_1] \quad \text{y} \quad B[x_2, r_2] \cap A_2 = \emptyset$$

Así de forma inductiva se obtiene para cada $n \in \mathbb{N}$, un punto $x_n \in X$ y un número $r_n < \frac{1}{n}$ para los cuales se tiene que

$$B[x_n, r_n] \subset B[x_{n-1}, r_{n-1}] \quad \text{y} \quad B[x_n, r_n] \cap A_n = \emptyset$$

Como la familia numerable $\{B[x_n, r_n] \ n \in \mathbb{N}\}$ consiste de conjuntos cerrados no vacíos, para la cual $B[x_n, r_n] \supset B[x_{n+1}, r_{n+1}]$ y $diam(B[x_n, r_n]) \to 0$, el teorema 1 9 garantiza que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] \neq \varnothing$

Seleccione ahora un $p \in B[x_n, r_n]$, dado que

$B[x_n, r_n] \subset B[x_1, r_1] \subset U$ y $B[x_n, r_n] \cap A_n = \emptyset$, se desprende que $p \in U \setminus A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Por consiguiente, $U \not\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ que era lo deseado ■

EJEMPLO 1.8: Se sabe que $\mathbb{R}$ con la métrica usual es un espacio métrico completo, entonces del teorema anterior se desprende que $\mathbb{R}$ es un espacio de Baire

1.4 RELACIÓN ENTRE CONTINUIDAD Y DIFERENCIACIÓN.

Tradicionalmente la definición de derivada de una función se introduce a través del límite como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto $x = c$

Sin embargo, en este trabajo tal definición no llenaría ciertas condiciones para probar la no existencia de la derivada de una función en un punto, se requiere de una definición más apropiada, como la siguiente

DEFINICIÓN 1.21: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$ y $c \in I$ Se dice que el numero real L es la derivada de f en c si para cualquier numero dado $\varepsilon > 0$ existe un numero $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in I$ y $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, entonces

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L\right| < \varepsilon$$

En este caso se dice que f es derivable en c y se escribe $f'(c) = L$

DEFINICIÓN 1.22: Una función f se llama periódica de periodo p si satisface que $f(x + p) = f(x)$ para todo x donde la función quede bien definida

OBSERVACIÓN 1.2: Suponga que la función periódica f de período 2α es continua para todo $x \in [-\alpha, \alpha]$ y, además, que existe un $c \in (-\alpha, \alpha)$ donde f no es diferenciable Entonces, por la periodicidad de f en cada otro intervalo real donde la función muestre una gráfica equivalente, existirá un punto c_k donde la función también es no diferenciable

TEOREMA 1 11. Si una función es derivable en un punto a , entonces es continua en a

Demostración

Sea la función f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en el punto a Entonces existe el siguiente límite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Como $\lim_{h \to 0} h = 0$, aplicando el cociente de límites y multiplicando, se obtiene

$$\lim_{h \to 0} [f(a + h) - f(a)] = f'(a)(0)$$

$$\lim_{h \to 0} [f(a + h) - f(a)] = 0,$$

de donde se obtiene que

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

Haciendo $a + h = x$ y tomando en cuenta la definición de límite, es fácil ver que equivale a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, esto significa que f es continua en a ■

OBSERVACIÓN 1.3· En particular las funciones derivables son continuas, pero no toda función continua es derivable

Esto quiere decir que el recíproco del teorema anterior no es cierto Precisamente éste es el tema central de esta investigación

TEOREMA 1.12 (Teorema de Rolle) Sea f una función continua en el intervalo cerrado $I = [a, b]$, y derivable en (a, b), suponga que existe la derivada f' en cualquier punto del intervalo abierto (a, b) y que $f(a) = f(b)$ Entonces existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

Demostración

Si se supone que $f(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces cualquier $c \in (a,b)$ satisface el teorema, y no hay nada más que probar

Ahora, si se supone que $f(x) \neq 0$ para algun valor de x, en el intervalo abierto (a, b) Ya que f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ se sabe, por el teorema del valor extremo, que f tiene un valor máximo absoluto en $[a, b]$ y un valor minimo absoluto en $[a, b]$

Además, como por hipótesis $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$ y ademas, $f(x)$ es distinto de cero para alguna $x \in (a, b)$, se concluye que f tendrá un valor máximo absoluto positivo en algún $c_1 \in (a, b)$ o un valor minimo absoluto negativo en $c_2 \in (a, b)$

De este modo, para $c = c_1$ o $c = c_2$, segun sea el caso, existe un extremo absoluto en un punto interior del intervalo $[a, b]$ Por lo tanto, el extremo absoluto $f(c)$ también es un extremo relativo y como por hipótesis $f'(c)$, se concluye que $f'(c) = 0$ ■

El siguiente teorema denominado Teorema del Valor Medio, expresa la idea geométrica de que hay algún punto de la curva $y = f(x)$ en la cual la recta tangente es paralela al segmento de recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

TEOREMA 1.13 (Teorema del valor medio): Supóngase que la función f es continua en el intervalo cerrado $I = [a, b]$ y que f tiene una derivada en el intervalo abierto (a, b) Entonces existe por lo menos un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Demostración

Se define la función h en el intervalo $I = [a, b]$ de la siguiente manera

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Notese que

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0,$$

es decir, $h(a) = 0$, además,

$$h(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0,$$

es decir, $h(b)=0$

Por consiguiente, la función h satisface las hipotesis del teorema de Rolle, ya que h es continua en $[a,b]$, es derivable en (a,b) y $h(a)=h(b)=0$, entonces existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $h'(c)=0$, pero observe que $h'(x)$ queda definida por

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$, de manera que

$$h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

De esta ultima relación se obtiene que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \blacksquare$$

Como bien se ha indicado se necesita el teorema del Valor Medio para estimar variaciones de una función, por ejemplo, estimar el incremento de la funcion f en el intervalo $[a,b]$ cuando se disponga de una cota M del valor absoluto de la derivada Esta idea se expresa en la siguiente propiedad

PROPIEDAD 1.2. Si $|f'(c)|\leq M$, se verifica que

$$|\Delta f| = |f'(c)|(b-a)\leq M(b-a)$$

Esta propiedad resulta haciendo $g(x)=x$ en el siguiente teorema

TEOREMA 1.14 (Teorema de Lagrange) Sean f y g funciones reales continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciables en el intervalo abierto (a,b) Entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

Demostración

Se define la funcion $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$, se sigue que por la continuidad de f y g, la función h también es continua en $[a,b]$, de la misma forma por la diferenciabilidad de f y g, la funcion h tambien es diferenciable en (a,b) Por otra parte, se tiene que

$$h(a) = h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$$

Aplicando el teorema de Rolle a la función h, se sigue la existencia de un $c \in (a,b)$ tal que

$$h(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0,$$

de donde se obtiene que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) \blacksquare$$

CAPÍTULO 2: FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO.

2.1 EJEMPLOS DE FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN ALGUNOS PUNTOS.

Se presentan a continuación algunos ejemplos de funciones continuas y no diferenciables en algunos puntos con lo cual se espera una mejor comprensión del tema

EJEMPLO 2.1. Pruebe que la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en $x = 0$, pero no es derivable en dicho punto

Solución

Nótese que $f(0) = \sqrt[3]{0} = 0$ y además,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{0} = 0$$

de manera que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ Por consiguiente, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en $x = 0$

Por otro lado, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no es derivable en $x = 0$, ya que su derivada en el punto cero está dada por

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

La razón por la cual no existe la derivada de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es que la recta tangente en $x = 0$ es vertical, por lo tanto su pendiente es infinita La siguiente gráfica ilustra esta situación

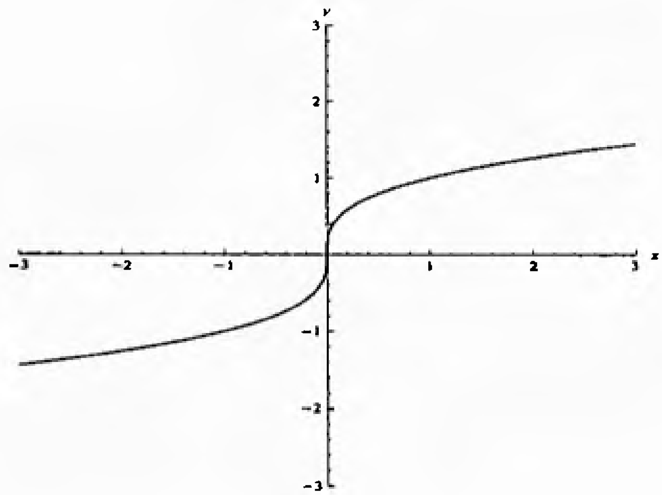

Figura 2 1 Función $f(x)=\sqrt[3]{x}$

EJEMPLO 2.2· Pruebe que la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero no es derivable en dicho punto

Solución

La función $f(x) = |x|$ se define por $f(x)=\begin{cases} x, & \text{Si } x>0 \\ 0, & \text{Si } x=0 \\ -x, & \text{Si } x<0 \end{cases}$

Nótese que $f(0) = 0$ y, además, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x) = -0 = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x) = 0$, de manera que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ Por consiguiente, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$

Por otro lado, la derivada de la función $f(x) = |x|$ sería

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} sng(h)$$

La función $sng(h)$ se define por $sgn(h)=\begin{cases} 1, & \text{si } h>0 \\ -1, & \text{si } h<0 \end{cases}$

Por consiguiente es claro que el límite por la izquierda es -1 y el límite por la derecha es $+1$, luego, no existe tal límite Por lo tanto, la función no es diferenciable en $x = 0$

La siguiente figura ilustra la gráfica de la función $f(x) = |x|$, en cuyo caso se identifica que la pendiente de la recta tangente por la izquierda de $x = 0$ es -1 , mientras que por la derecha es $+1$

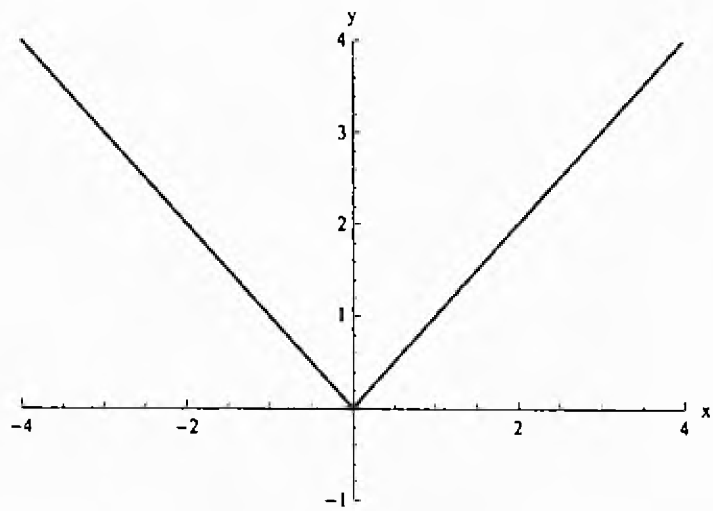

Figura 2.2 Función $f(x) = |x|$

EJEMPLO 2 3: Sean $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $f\ [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ la funcion definida por

$$f(x) = sng(x)$$

a) Calcule la integral definida F de f en $[-a, a]$

b) Pruebe que f no posee antiderivada en $[-a, a]$

Prueba

a) La función $Sng(x)$ se define de la siguiente manera

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{si } -a\leq x<0\\ 0, & \text{si } x=0\\ 1, & \text{si } 0<x\leq a\end{cases}$$

La figura a continuación ilustra la función Sng(x)

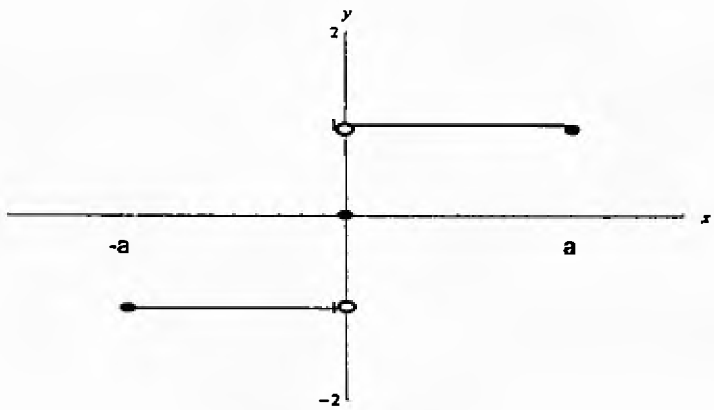

Figura 2.3: Función $Sng(x)$

La integral indefinida de f en $[-a,a]$ está definida por

$$F(x)=\int_{-a}^{x}f(t)\,dt$$

Se tienen los siguientes casos

- Si $x<0$, entonces $F(x)=\int_{-a}^{x}f(t)\,dt=-\int_{-a}^{x}dt=-t\,\big|_{-a}^{x}=-(x+a)$

- Si $x=0$, entonces $F(x)=\int_{-a}^{x}f(t)\,dt=-\int_{-a}^{0}dt=-t\,\big|_{-a}^{0}=-a$

➢ Si $x > 0$, entonces $F(x) = \int_{-a}^{x} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt$

$$= -a + \int_{0}^{x} dt$$

$$= -a + t \,|_{0}^{x}$$

$$= -a + x$$

Así pues,

$$F(x) = \begin{cases} -x - a\,, & \text{si } -a < x \leq 0 \\ x - a\,, & \text{si } \quad 0 < x \leq a \end{cases}$$

b) Note que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(h-0) - F(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{F(h) + a}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h - a + a}{h} = -1$$

Además, se tiene que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(h) + a}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h - a + a}{h} = 1$$

➢ Si $-a < x < 0$, entonces $F'(x) = -1$

➢ Si $0 < x < a$, entonces $F'(x) = 1$

Por lo tanto, F no es diferenciable en $0 \in [-a, a]$ ■

2.2 FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN UN CONJUNTO ENUMERABLE DE PUNTOS.

El propósito de esta sección es mostrar algunos ejemplos de funciones continuas que poseen una cantidad de puntos enumerable donde ellas no tienen derivadas

Adicionalmente, en la siguiente sección se amplía con más detalles, la idea antes mencionada, para construir funciones continuas no derivables en punto alguno

DEFINICIÓN 2.1: Sea I un intervalo abierto real Un punto $a \in I$ se llama **punto cúspide** de la gráfica de una función f en dicho intervalo si satisface las siguientes condiciones

1 Para todo $x \in I$ tal que, $x \leq a$, la gráfica de f es una recta de pendiente estrictamente positiva

2 Para todo $x \in I$ tal que, $x \geq a$, la gráfica de f es una recta de pendiente estrictamente negativa

3 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, existe

Si (1) y (2) intercambian el signo de las pendientes, entonces el punto se llama **punto de abismo** Si la función satisface esta definición en una vecindad del punto, entonces el punto es de cúspide (o abismo) en dicha vecindad

La situación antes mencionada, permite la posibilidad de que una función tenga un número enumerable de puntos de cúspides y de abismos en un intervalo de diámetro finito

TEOREMA 2 1 Sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de cuspıde (o abısmo) de una funcıón f La funcıon f es contınua y no dıferencıable en a

Demostracıón

Sea f la función definıda por

$$f(x)=\begin{cases} m_1x+b_1, & \text{sı } x\leq a \\ m_2x+b_2, & \text{sı } x\geq a \end{cases},$$

donde $m_1 > 0$, $m_2 < 0$ Entonces la funcıón f tıene en a un punto cuspıde Por la parte (3) de la definıcıón de punto cuspıde se tıene que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, lo cual sıgnıfica que la función es contınua en $x = a$

Probemos la no exıstencıa de $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

En efecto,

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-}\frac{m_1x+b_1-(m_1a+b_1)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{m_1x+\cancel{b_1}-m_1a-\cancel{b_1}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{m_1x-m_1a}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{m_1\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a}(m_1)$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m_1$$

Por otro lado, se tiene

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{m_2x+b_2-(m_2a+b_2)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{m_2x+\cancel{b_2}-m_2a-\cancel{b_2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{m_2x-m_2a}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{m_2\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to a}(m_2)$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=m_2$$

Como $m_1\neq m_2$, se sigue que

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\neq\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

Esto implica que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\text{, no existe}$$

En consecuencia se concluye que

$$f'(a)\ \text{ no existe}$$

Por lo tanto, la función f es continua y no diferenciable en el punto cúspide $x=a$ (Análogamente se prueba el teorema cuando $x=a$ es un punto de abismo) ■

EJEMPLO 2.4: Constrúyase a partir de la función $f(x) = |x|$ una función que tenga un número enumerable de puntos donde ella sea continua y no diferenciable

Solución

En el ejemplo 2 2 se determinó que la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero no posee derivada en dicho punto Utilizando esta idea se va a definir una función periódica que sea continua en todos los numeros reales $\mathbb{R}$, pero que no tenga derivada en ningún entero $\mathbb{Z}$

En efecto se define la función g de la siguiente manera

$$g(x)=\begin{cases} x, & \text{si } x\in[0,1] \\ -x, & \text{si } x\in[-1,0] \end{cases}$$

donde $g(x+2) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

La función g definida de esta manera es periodica de período dos y en el intervalo $[-1,1]$, tiene la misma gráfica que la función $f(x) = |x|$

La gráfica de la función g se va a repetir a lo largo de toda la recta real cada dos unidades, sin embargo, a simple vista se podria pensar que el dominio de la función g solamente es el intervalo $[-1,1]$, pero, por la periodicidad de la función esto no es cierto, como vemos seguidamente

Nótese que los valores básicos de definición de la función son los siguientes

$$g(-1) = 1\,, \qquad g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,, \qquad g(0) = 0, \qquad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,, \qquad g(1) = 1$$

Utilizando la periodicidad $g(x+2) = g(x)$, se tiene

Para $x = -3$, se tiene

$g(-3+2) = g(-3)$, de donde $g(-1) = g(-3)$, es decir, se obtiene $g(-3) = 1$

Para $x = -\frac{5}{2}$, se tiene

$g\left(-\frac{5}{2}+2\right) = g\left(-\frac{5}{2}\right)$, de donde $g\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(-\frac{5}{2}\right)$, es decir, se obtiene $g\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Para $x = -2$, se tiene

$g(-2+2) = g(-2)$, de donde $g(0) = g(-2)$, es decir, se obtiene $g(-2) = 0$

Para $x = -\frac{3}{2}$, se tiene

$g\left(-\frac{3}{2}+2\right) = g\left(-\frac{3}{2}\right)$, de donde $g\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(-\frac{3}{2}\right)$, es decir, se obtiene $g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Para $x = -\frac{1}{2}$, se tiene

$g\left(-\frac{1}{2}+2\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right)$, de donde $g\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right)$, es decir, se obtiene $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Para $x = 0$, se tiene

$g(0+2) = g(0)$, de donde $g(2) = g(0)$, es decir, se obtiene $g(2) = 0$

Para $x = \frac{1}{2}$, se tiene

$g\left(\frac{1}{2}+2\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$, de donde $g\left(\frac{5}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$, es decir, se obtiene $g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Se puede continuar evaluando esta función en todos los números reales, a continuación, la gráfica de la función no diferenciable en todo número entero.

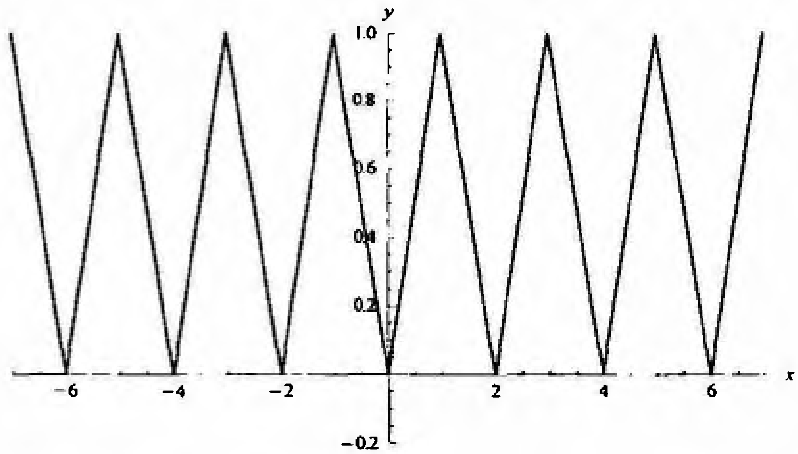

Figura 2.4: Función continúa en todo $\mathbb{R}$ y no diferenciable en todo $\mathbb{Z}$.

EJEMPLO 2.5: Modifique la función del ejemplo anterior, utilizando una serie divergente.

Solución

Considere la serie divergente $U_n=\sum_{n=1}^{\infty}2^n$, la cual es una serie divergente; ya que $\lim_{n\to\infty} U_n=\infty$, entonces por el criterio del n-ésimo término, la serie es divergente.

Usando el n-ésimo término de esta serie se modifica la función g del ejemplo anterior, de la siguiente manera:

Se define la función f como sigue:

$$f_n(x) = g(2^n x),\ \text{donde } n = 1, 2, 3, \ldots$$

y la función g es:

$$g(x)=\begin{cases} x, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x, & \text{si } \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde $g(x+2) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nótese que cuando $n = 0$, se obtiene $f_0(x) = g(x)$, la gráfica de esta función es siguiente figura:

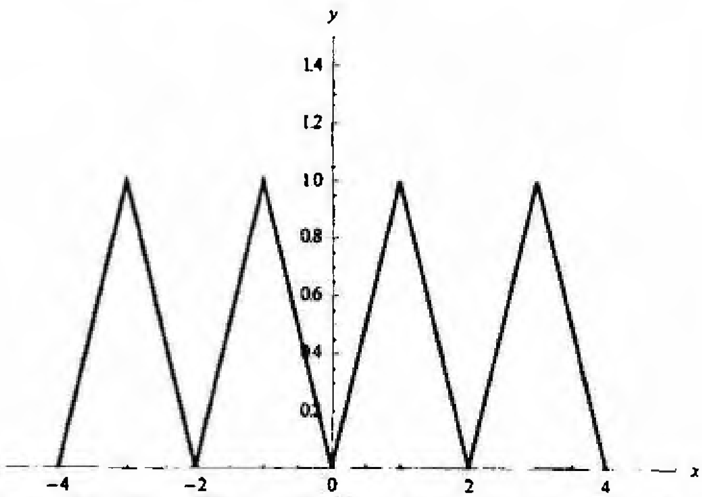

Figura 2.5: Función continúa de periodicidad dos (2).

Por otro lado, cuando $n = 1$, se tiene que:

$$f_1(x) = g(2x) = \begin{cases} -2x \ , & si \ -1 \leq 2x \leq 0 \\ 2x \ , & si \ \ 0 \leq 2x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_1(x) = g(2x) = \begin{cases} -2x \ , & si \ -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ 2x \ , & si \ \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \ , \ f_1(x+1) = f_1(x)$$

La gráfica de esta función se muestra en la siguiente figura:

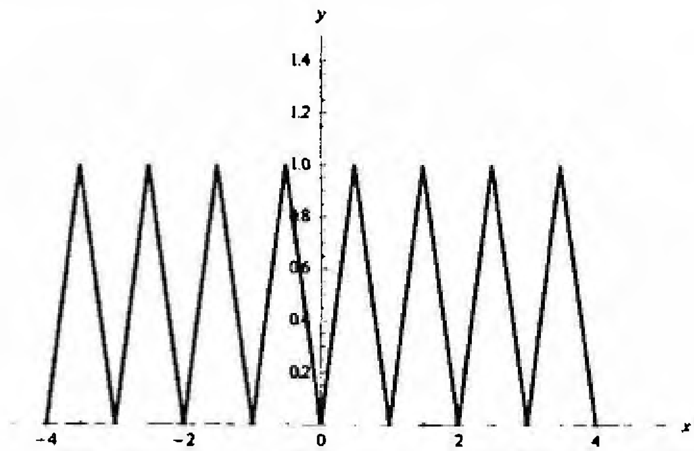

Figura 2.6: Función continúa de periodicidad uno (1).

De manera similar para $n = 2$, se tiene:

$$f_2(x) = g(4x) = \begin{cases} -4x \ , & si \ -1 \leq 4x \leq 0 \\ 4x \ , & si \ \ 0 \leq 4x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = g(4x) = \begin{cases} -4x \ , & si \ -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 4x \ , & si \ \ 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \ , \ f_2\left(x + \frac{1}{2}\right) = f_2(x)$$

La gráfica de esta función se muestra en la siguiente gráfica:

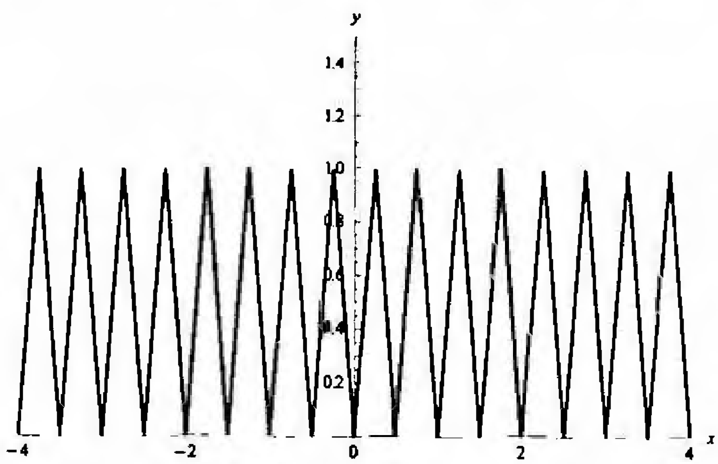

Figura 2.7: Función continua de periodicidad un medio $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Se observa que a medida que n aumenta, se tiene que la cantidad de cuspides también aumenta

Ahora, la pregunta es ¿se podría construir una función periódica tal que en su período básico todos sus puntos presenten una cúspide tal que en este intervalo ella no sea diferenciable en ningun punto?, la respuesta a esta interrogante es la que se desea despejar en mi tesis

EJEMPLO 2.6 Sea $D = \{d_1, d_2, d_3, \ldots\}$ un subconjunto enumerable de $\mathbb{R}$ Constrúyase una funcion continua sobre $\mathbb{R}$ y no diferenciable sobre D

Solución

Consideremos una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que la serie que se forma con estos números sea convergente, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, consideremos la función $h_x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera

$$h_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora, la función $g\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n h_x(d_n)$$

La función g es continua excepto en los puntos de D y entonces la funcion f dada por

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

Es continua, acotada y gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, deja de ser diferenciable exactamente en los puntos de D

En efecto,

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x g(t)dt\right] = g(x),$$

pero precisamente, la función g , que es la derivada de f , es discontinua en D, y, por ende, no tiene derivada en estos puntos

En particular, en este ejemplo se podría considerar el conjunto de los números naturales pares $D = \{2, 4, 6, \ \}$ que es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ y la serie $U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$, la cual es una serie geométrica convergente y su suma está dada por

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Bajo estas hipótesis se observe cómo es la continuidad de la función g , al examinar su trazado gráfico, como sigue la función g $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fue definida por

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n h_x(d_n)$$

Escribiendo $g(x) = x_1 h_1(d_1) + x_2 h_2(d_2) + \ x_3 h_3(d_3) \ +$

Nótese que si $t\ < 2$, entonces $h_x(t) = \ 1$ Por consiguiente, en este rango se tiene que

$$g(x) = x_1 + x_2 + x_3 + \qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \qquad = \ 1$$

para todo $x\ < 2$ Mientras que cuando $x = 2$, se tiene $g(2) = 0$

Esto significa que la gráfica de la función g para las $x\ < 2$ es la recta horizontal $y = 1$

Por otro lado, tomando $2 \leq t < 4$, se tiene que $g(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \qquad = \frac{1}{2}$ para todo $2\ <\ x\ < 4$, esto significa que la grafica es la recta horizontal $y = \frac{1}{2}$ Si se continua con este proceso se obtiene la siguiente gráfica de la función g , la cual se muestra en la siguiente figura

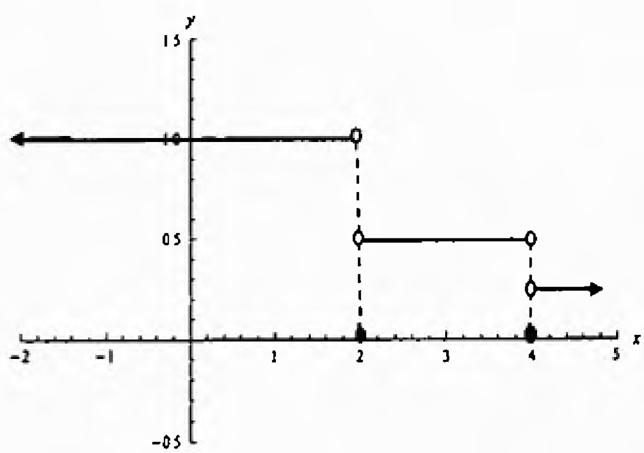

Figura 2.8: Gráfica de la función g

Es claro que la gráfica de la función g muestra su discontinuidad en los puntos del conjunto numerable $D = \{2, 4, 6, \ \}$, en cuyo caso se tienen discontinuidades de salto

Este ejemplo, permite la construcción de un numero infinito de funciones continuas no diferenciables en un conjunto enumerable de puntos ■

2.3 FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN ESPACIO DE BAIRE.

Haciendo uso del concepto de espacio de Baire se prueba la existencia de funciones continuas y no diferenciables en punto alguno

Primero, considérese el espacio métrico $(\mathcal{F}, d)$ de funciones continuas de valores reales y definidos en el intervalo $I = [0, 1]$

DEFINICIÓN 2.2· Sobre el conjunto $\mathcal{F}$ se define la métrica d de la siguiente manera $d(f, g) = máx_{x \in I}|f(x) - g(x)|$ $con\, f, g \in \mathcal{F}$

Nótese que se está tomando la diferencia de las imágenes de las dos funciones continuas en $I = [0, 1]$ Se sabe que el espacio $(\mathcal{F}, d)$, o simplemente $\mathcal{F}$, es un espacio métrico completo Por consiguiente, el teorema 1 10 proporciona el resultado del teorema siguiente

TEOREMA 2.2· El espacio métrico $(\mathcal{F}, d)$ es de Baire

Se define una familia numerable $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de conjuntos abiertos y densos de $\mathcal{F}$, y, tomando $x \in I$ y $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, se consideran los cocientes

$$f^-(x, h) = \left|\frac{f(x-h) - f(x)}{h}\right| \text{ y } f^+(x, h) = \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right|, (1)$$

Como $h \leq \frac{1}{2}$ y $0 < x < 1$, es claro que $\{x - h, x + h\} \cap I \neq \emptyset$, lo cual significa que al menos una de las expresiones en (1) está definida

Considere $\Delta f(x,h) = máx\{f^-(x,h), f^+(x,h)\}$ si ambos cocientes existen, de lo contrario $\Delta f(x,h)$ será igual a la expresión existente

Dado que $\Delta f(x,h) \geq 0$, se toma para cada $h \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$, $n \geq 2$,

$$\Delta_h f(x,h) = inf\{\Delta f(x,h) \ x \in I\}$$

Se define la familia $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$ de la siguiente manera

$f \in U_n$ si y solo si, $\Delta_n f > n$ para algún $h \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$ y todo $n \geq 2$

EJEMPLO 2.7: Considérese la función $f \ [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \alpha\left[1 - 4\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2\right] \text{, con } \alpha > 0$$

Solución

Calculemos los cocientes $f^-(x,h)$ y $f^+(x,h)$ para el valor de h especificado de la siguiente manera

Para $h = \frac{1}{4}$, se obtiene

$$f^-\left(x, \tfrac{1}{4}\right) = \left|\frac{f\left(x - \frac{1}{4}\right) - f(x)}{\frac{1}{4}}\right| = \left|\frac{\alpha\left\{1 - 4(x - \frac{3}{4})^2\right\} - \alpha\left\{1 - 4(x - \frac{1}{2})^2\right\}}{\frac{1}{4}}\right|$$

$$=\left|4\alpha\left\{1-4\left(x^2-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{9}{16}\right)-1+4\left(x^2-x+\tfrac{1}{4}\right)\right\}\right|$$

$$=\left|4\alpha\left\{1-4x^2+6x-\tfrac{9}{4}-1+4x^2-4x+1\right\}\right|$$

$$=\left|4\alpha\left\{2x-\tfrac{5}{4}\right\}\right|$$

$f^-\left(x,\tfrac{1}{4}\right)=\alpha|8x-5|$, si $x\in\left[\tfrac{1}{4},1\right]$

Análogamente, se tiene que

$$f^+\left(x,\tfrac{1}{4}\right)=\left|\frac{f\left(x-\frac{1}{4}\right)-f(x)}{\frac{1}{4}}\right|=\left|\frac{\alpha\left\{1-4(x-\frac{1}{4})^2\right\}-\alpha\left\{1-4(x-\frac{1}{2})^2\right\}}{\frac{1}{4}}\right|$$

$$=\left|4\alpha\left\{1-4\left(x^2-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{16}\right)-1+4\left(x^2-x+\tfrac{1}{4}\right)\right\}\right|$$

$$=\left|4\alpha\left\{1-4x^2+2x-\tfrac{1}{4}-1+4x^2-4x+1\right\}\right|$$

$$=\left|4\alpha\left\{-2x+\tfrac{3}{4}\right\}\right|$$

$$=\alpha|3-8x|$$

$f^+\left(x,\tfrac{1}{4}\right)=\alpha|8x-3|$, si $x\in\left[0,\tfrac{3}{4}\right]$

Así se tiene que

$$\Delta f\left(x,\tfrac{1}{4}\right)=\begin{cases} f^-\left(x,\tfrac{1}{4}\right), & \text{si } x\in\left[\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\right]\bigcup\left(\tfrac{3}{4},1\right] \\ f^+\left(x,\tfrac{1}{4}\right), & \text{si } x\in\left[0,\tfrac{1}{4}\right)\bigcup\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}\right] \end{cases}$$

Si redefinimos los valores de $f^{-}\left(x,\frac{1}{4}\right)$ y $f^{+}\left(x,\frac{1}{4}\right)$, se tendría que

$$f^{-}\left(x,\tfrac{1}{4}\right)=\begin{cases} 8\alpha x - 5\alpha\,, & \text{si } x > \frac{5}{8} \\ -8\alpha x + 5\alpha\,, & \text{si } x < \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$f^{+}\left(x,\tfrac{1}{4}\right)=\begin{cases} 8\alpha x - 3\alpha\,, & \text{si } x > \frac{3}{8} \\ -8\alpha x + 3\alpha\,, & \text{si } x < \frac{3}{8} \end{cases}$$

Como $\Delta f\left(x,\frac{1}{4}\right) = máx\{f^{-}(x,h), f^{+}(x,h)\}$ se sigue que $\Delta f\left(x,\frac{1}{4}\right) = |m| = |8\alpha| \geq \alpha$ para todo $x \in [0,1]$, donde m es la pendiente de la recta, es decir, $\Delta f\left(x,\frac{1}{4}\right) \geq \alpha$ para todo $x \in [0,1]$

Suponga ahora que $x \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, se sigue que es evidente que $x + \frac{1}{4} < 1$ y que $x - \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$ Además, analizando la función definida como

$$f(x)=\alpha\left[1-4\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^{2}\right],$$

se tiene

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)= \alpha\left[1-4\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)^{2}\right] = \alpha \text{ y}$$

$$f(0)=0, \qquad f(1)=0$$

La gráfica de esta función y de las rectas correspondientes para un $x \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, se muestran en la siguiente figura

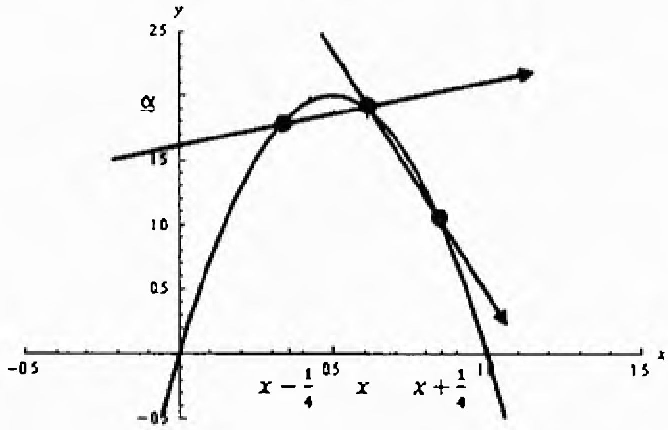

Figura 2 9· Función $\Delta f\left(x,\frac{1}{4}\right)=|m|\geq\alpha$

Por otro lado, como la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ se definió por $f\in U_n$ si y solo si $\Delta_n f>n$, para algun $h\in\left(0,\frac{1}{n}\right]$ y todo $n\geq 2$, se tiene que si $\alpha>4$, entonces $f\in U_4$

Inspirados en este caso particular, se pueden exhibir elementos de U_n para toda $n\in\mathbb{N}$, mediante el siguiente procedimiento

Considere la función g cuya gráfica aparece en la siguiente figura

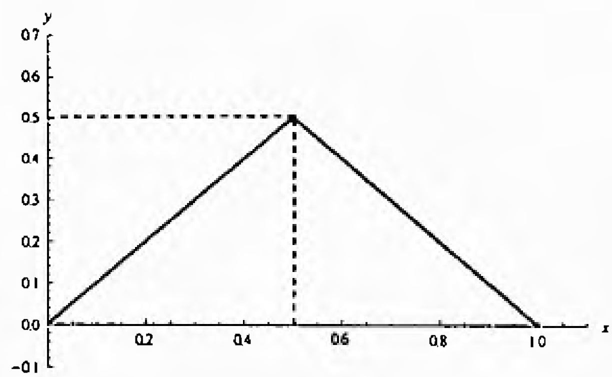

Figura 2 10. Función genérica con una cúspide

Observe que $\Delta g(x,h)\geq\alpha$, para cualquier $h\leq\frac{1}{4}$ En consecuencia, si $\alpha>n$, entonces $g\in U_n$

De forma similar, se obtiene una función $k \in U_n$, si $\alpha > n$ donde la gráfica de k es como la que se muestra en la siguiente figura

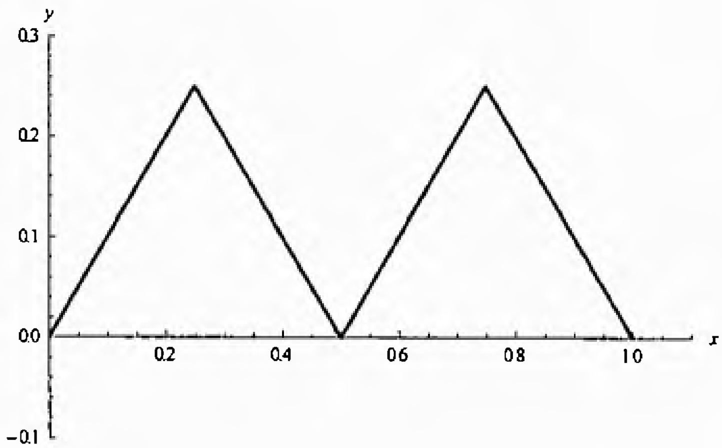

Figura 2.11: Función con dos cúspide y un abismo

Nótese que la función k tiene la forma de la función valor absoluto en forma periódica, especificamente la gráfica anterior exhibe los puntos $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ donde ella es continua y no derivable. Esta idea se concretiza con la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.1: Dados $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ y $[a, b] \subset [0, 1]$, existe la función $g \in \mathcal{F}$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $\Delta_h g > n$ con $0 < h < \frac{b-a}{m}$

Prueba

Como $[a, b] \subset [0, 1]$, se sigue que $0 < a < b$, de donde $b - a > 0$ y siendo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $n(b - a) > 0$. Pero como $\varepsilon > 0$ es un numero arbitrario, suficientemente pequeño, se tiene que $0 < \varepsilon < n(b - a)$, entonces por la propiedad arquimediana existe un numero par $m \in \mathbb{N}$ tal que se satisface $m\,\varepsilon > n(b - a)$ de donde se obtiene $\frac{\varepsilon}{\frac{b-a}{m}} > n$, de manera que $\Delta_h g > n$

con $0 < h < \frac{b-a}{m}$, y la función $g \in \mathcal{F}$ se denomina función diente de serrucho, cuya gráfica se muestra en la siguiente figura, donde $x_i = a + \frac{(b-a)i}{m}$ ■

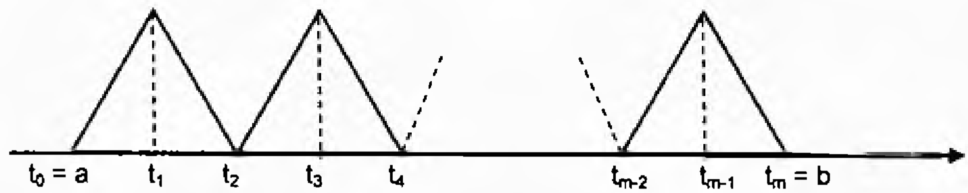

Figura 2 12· Funcion con múltiples cuspides y abismos

2 4 LA FUNCIÓN DE WEIERSTRASS.

Antes de Karl Weierstrass se dieron algunos intentos por demostrar la existencia de funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, entre los que podemos citar a Bolzano quien en 1834 fue el primer matemático que logró separar de manera clara los conceptos de continuidad y diferenciabilidad

El matemático en mención, logró construir de manera geométrica una función continua no diferenciable en algun punto, pero como tantas otras contribuciones de este matemático, éste aporte también pasaría desapercibido por sus contemporáneos

Además del intento de Bolzano se tiene en 1830 a Cellérier, quien presenta la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} Sen(a^n x)$ donde a es un numero natural par suficientemente grande Este ejemplo no seria publicado hasta 1890, cuando se esclarece que esta función no tiene derivada finita en algun punto, mientras que posee derivada igual a más infinito en un conjunto numerable denso, en cuyo caso dice Grabinsky (1997), se puede pensar que cada singularidad representa un punto de inflexión vertical

En 1861 Weierstrass se plantea la posibilidad de construir una función continua y no diferenciable en punto alguno, en cuyo caso trabajo arduamente, y no es hasta 1872 cuando logra probar que la funcion

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \, Cos\left(a^n \, \pi \, x\right),$$

donde $a \in \mathbb{N}$ es impar, $b \in (0,1)$ y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, es continua en toda la recta real y no es diferenciable en punto alguno

Comenta Brito (2011), que es un hecho aceptado hoy en dia por la comunidad matematica que la función continua, pero no diferenciable, creada por Weierstrass, fue el primer ejemplo contundente de este tipo de función que apareció por primera vez publicada en una revista arbitrada de matemática, en el año de 1875

Muchos matemáticos de la época de Weierstrass ya conocían de la existencia de esta función, puesto que el propio autor la dio a conocer el 18 de julio de 1872 en una conferencia impartida en la Academia Real de Ciencias de Berlín Sin embargo, Allan Pinkus cuenta que Weierstrass dio a conocer su función en un salón de clases en 1861

TEOREMA 2 3 (La Función de Weierstrass) Sea $b \in (0,1)$ y a un número entero impar, tal que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, entonces la funcion $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n Cos\left(a^n \pi x\right)$ es continua y no es diferenciable en punto alguno

Demostración

(i) Prueba de la continuidad de la función de Weierstrass

Primero observe, que la serie que define la función de Weierstrass converge uniformemente En efecto, como se tiene que

$$|b^n Cos(a^n \pi x)| \ \leq \ b^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } x \in \mathbb{R}$$

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge, ya que es una p - serie con $p = b < 1$, se tiene, por el teorema 1 3, que la serie definida por la función de Weierstrass es uniformemente convergente

Finalmente, como los términos de la función de Weierstrass son continuos, por el teorema 1 1, se tiene que la función f es continua

(ii) Prueba de la no diferenciabilidad en punto alguno de la función de Weierstrass

Se prueba que $\lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$, no existe

En efecto, se tiene que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{Cos\left(a^n \pi (x+h)\right) - Cos(a^n \pi x)}{h}$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} b^n \frac{Cos\left(a^n \pi (x+h)\right) - Cos\left(a^n \pi x\right)}{h} + \sum_{n=m}^{\infty} b^n \frac{Cos\left(a^n \pi (x+h)\right) - Cos\left(a^n \pi x\right)}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = J_m(h) + C_m(h),$$

donde se ha llamado

$$J_m(h) = \sum_{n=0}^{m-1} b^n \frac{Cos\left(a^n\pi\left(x+h\right)\right) - Cos\left(a^n\pi x\right)}{h}$$

y la expresión

$$C_m(h) = \sum_{n=m}^{\infty} b^n \frac{Cos\left(a^n\pi\left(x+h\right)\right) - Cos\left(a^n\pi x\right)}{h}$$

Si la derivada de la función f existiera en algun punto c, entonces por la propiedad arquimediana se tendría que $|f'(c)| \leq a^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces por la propiedad 1 2 del Teorema del Valor Medio, se tiene que

$$\left|Cos\left(a^n\pi\left(x+h\right)\right) - Cos(a^n\pi\, x)\right| \leq a^n|h|$$

$$\left|\frac{Cos\left(a^n\pi\left(x+h\right)\right) - Cos(a^n\pi\, x)}{h}\right| \leq a^n$$

$$b^n\left|\frac{Cos\left(a^n\pi\left(x+h\right)\right) - Cos(a^n\pi\, x)}{h}\right| \leq a^n b^n$$

$$b^n\left|\frac{Cos\left(a^n\pi\left(x+h\right)\right) - Cos(a^n\pi\, x)}{h}\right| \leq \pi a^n b^n$$

$$\sum_{n=0}^{m-1}\left|b^n\left\{\frac{Cos\left(a^n\pi\left(x+h\right)\right) - Cos\left(a^n\pi\, x\right)}{h}\right\}\right| \leq \sum_{n=0}^{m-1}(\pi a^n b^n)$$

$$\left|J_m(h)\right| \leq \sum_{n=0}^{m-1}\pi\; a^n\; b^n$$

Nótese que $\sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n$ es una serie geométrica finita cuya suma es:

$$|J_m(h)| \leq \sum_{n=0}^{m-1} \pi\, a^n\, b^n = \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1} < \frac{\pi a^m b^m - 1}{ab - 1}$$

Esto permite concluir parcialmente que:

$$|J_m(h)| < \frac{\pi a^m b^m - 1}{ab - 1}, \qquad (1)$$

Además, se tiene que $\lim_{h \to 0} J_m(h)$ existe, porque es menor que infinito (∞).

Seguidamente se estima el valor de $|C_m(h)|$ por abajo; en primer lugar, considérese que $a^m x$ es un número real que se puede escribir como la suma de su parte entera α_m y su parte decimal β_m , es decir, se puede escribir como $a^m x = \alpha_m + \beta_m$, donde α_m es un entero, $-\frac{1}{2} \leq \beta_m < \frac{1}{2}$ y, además, defínase $h = \frac{1 - \beta_m}{a^m}$; entonces, usando la relación $-\frac{1}{2} \leq \beta_m < \frac{1}{2}$, se obtiene:

$$-\frac{1}{2} - 1 \leq \beta_m - 1 < \frac{1}{2} - 1$$

$$-\frac{3}{2} \leq \beta_m - 1 < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < 1 - \beta_m \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2a^m} < \frac{1 - \beta_m}{a^m} \leq \frac{3}{2a^m}$$

$$0 < \frac{1}{2a^m} < h \leq \frac{3}{2a^m}$$

$$0 < h \leq \frac{3}{2a^m}$$

Por otro lado, se tiene que

$$a^n\,\pi(x + h) = a^{n-m}\,a^m\pi(x + h) = a^{n-m}\pi(a^m x + a^m h)$$

Pero como $a^m x = \alpha_m + \beta_m$ y $a^m h = 1 - \beta_m$, entonces la expresion antenor se transforma sustituyendo, las cantidades indicadas, se tiene

$$a^n\,\pi(x + h) = a^{n-m}\,a^m\pi(x + h) = a^{n-m}\pi(\alpha_m + \beta_m + 1 - \beta_m)$$

$$a^n\,\pi(x + h) = a^{n-m}\,a^m\pi(x + h) = a^{n-m}\pi(\alpha_m + 1)$$

De donde se obtiene que $Cos(a^n\pi(x+h)) = Cos(a^{n-m}\pi(\alpha_m + 1)) = (-1)^{\alpha_m + 1}$, es decir, se tiene que

$$Cos(a^n\pi(x+h)) = (-1)^{\alpha_m+1}, \qquad (2)$$

Como a es impar, se sigue que

$$Cos(a^n\pi\,x) = Cos(a^{n-m}\pi\,a^m x) = Cos\big(a^{n-m}\pi(\alpha_m + \beta_m)\big)$$

Aplicando la identidad a la suma de los cosenos de dos ángulos, se tiene

$$Cos(a^{n-m}\pi\,\alpha_m + a^{n-m}\pi\,\beta_m) = Cos(a^{n-m}\pi\,\alpha_m)\,Cos(a^{n-m}\pi\,\beta_m)$$
$$- Sen(a^{n-m}\pi\,\alpha_m)\,Sen(a^{n-m}\pi\,\beta_m)$$

Como a es impar, se sigue que cualquier potencia de él es impar, de marera que la expresión antenor se reduce a

$$Cos(a^{n-m}\pi\,\alpha_m + a^{n-m}\pi\,\beta_m) = Cos(a^{n-m}\pi\,\alpha_m)\,Cos(a^{n-m}\pi\,\beta_m) - (0)(0)$$

$$Cos(a^{n-m}\pi\,\alpha_m + a^{n-m}\pi\,\beta_m) = Cos(a^{n-m}\pi\,\alpha_m)\,Cos(a^{n-m}\pi\,\beta_m)$$

Se ha encontrado que

$Cos(a^n\pi\, x) = Cos(a^{n-m}\pi\, \alpha_m)\, Cos(a^{n-m}\pi\, \beta_m) = (-1)^{\alpha_m} Cos(a^{n-m}\pi\, \beta_m)$, es decir, se tiene que

$$Cos(a^n\pi\, x) = (-1)^{\alpha_m} Cos(a^{n-m}\pi\, \beta_m)\,, \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3), en la relación siguiente

$$C_m(h) = \sum_{n=m}^{\infty} b^n \frac{Cos\left(a^n\pi(x+h)\right) - Cos\left(a^n\pi x\right)}{h}$$

Obtenemos el siguiente resultado

$$C_m(h) = \sum_{n=m}^{\infty} b^n \frac{(-1)^{\alpha_m+1} - (-1)^{\alpha_m} Cos\left(a^{n-m}\pi\, \beta_m\right)}{h}$$

$$C_m(h) = \frac{(-1)^{\alpha_{m+1}}}{h} \sum_{n=m}^{\infty} b^n \left\{1 + Cos(a^{n-m}\pi\, \beta_m)\right\}$$

Como todos los términos de la serie son positivos y utilizando la siguiente relación

$$0 < h \leq \frac{3}{2a^m}\text{ , se tiene}$$

$$|C_m(h)| > \frac{b^m}{|h|} > \frac{2}{3}\, a^m\, b^m\,, \qquad (4)$$

Finalmente, utilizando las relaciones (1) y (4), se tiene que

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \geq |C_m(h)| - |J_m(h)| > \tfrac{2}{3} a^m\, b^m - \frac{\pi\, a^m\, b^m}{ab-1}$$

De donde se tiene que

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| > \left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right)a^m b^m \ , \qquad (5)$$

Pero $ab > 1 + \frac{2}{3}\pi$, de donde $ab > 1$ y $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right)a^m b^m = \infty$ Por consiguiente, cuando $m \to \infty$ se tiene que $h \to 0$, se sigue que el lado derecho de la expresión (5) tiende a ∞, de manera que queda probado que $f'(x)$ no existe ■

2.4 1 ALGUNOS CASOS PARTICULARES DE LA FUNCIÓN DE WEIERSTRASS Y RIEMANN

El uso de la tecnología para poder interpretar el comportamiento gráfico de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno debe ser una herramienta, que si bien no propicia una prueba contundente del asunto, permite tener una visión más holística de lo que se tiene que demostrar académicamente

Seguidamente, se utiliza el *Software Mathematica* para mostrar algunas iteraciones de las funciones que nos ocupan en este apartado

La función de Weierstrass es el ejemplo más prototípico de una función continua y no diferenciable en punto alguno, se define como sigue

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n Cos(a^n \pi x) \ ,$$

donde a es impar, $0 < b < 1$ y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$

Tomemos $a = 9$ y $b = \frac{2}{3}$, para mostrar algunas gráficas de estas funciones para la función $W(x) = \sum_{n=1}^{1} (\frac{2}{3})^n Cos((9)^n \pi x)$, se tiene la siguiente gráfica:

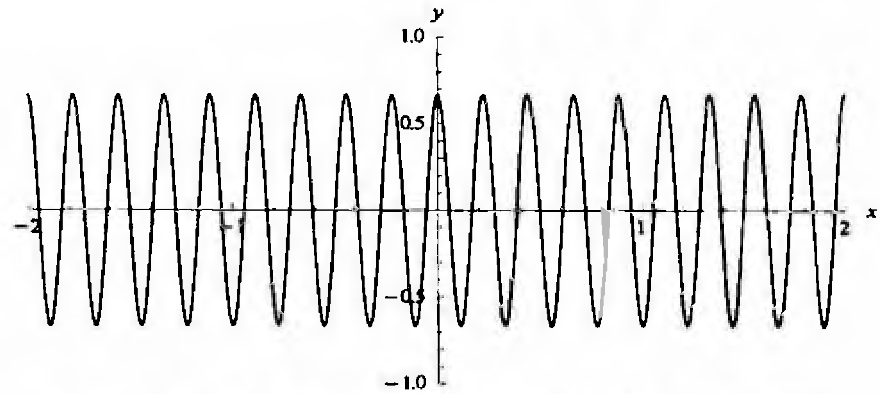

Figura 2.13: Primer término de la función de Weierstrass.

Para la función $W(x) = \sum_{n=1}^{2} (\frac{2}{3})^n Cos((9)^n \pi x)$, se tiene la siguiente gráfica:

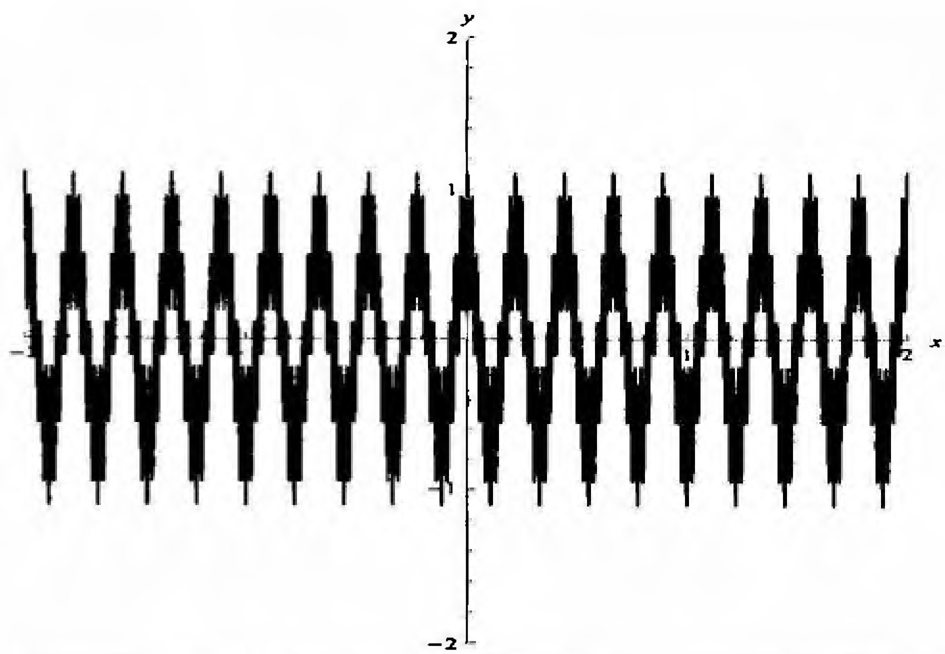

Figura 2.14: Suma de los dos primeros términos de la función de Weierstrass.

Para la función $W(x)=\sum_{n=1}^{5}(\frac{2}{3})^n Cos((9)^n \pi x)$, se tiene la siguiente gráfica:

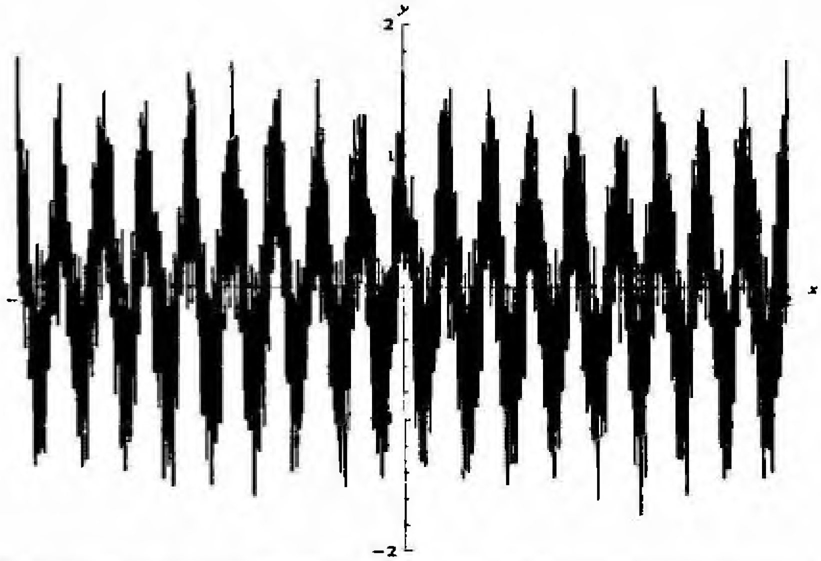

Figura 2.15: Suma de los cinco primeros términos de la función de Weierstrass.

Nótese que a medida que n aumenta, se tiene que aumentan la cantidad de cúspides de la gráfica y en cada una de ellas no existe la derivada a pesar de que la función sigue siendo continua.

Observe ahora algunas iteraciones para la función de Bernard Riemann, quien en 1861 afirmó como una conjetura que la función R definida por:

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sen(n^2x)}{n^2},$$

era continua, pero nunca diferenciable.

Se pueden hacer algunas iteraciones de las gráficas de estas funciones utilizando el *Software Wolfram Matematica*, como sigue:

Para la función $R(x)=\sum_{n=1}^{2}\frac{Sen(n^2x)}{n^2}$, se tiene la siguiente gráfica

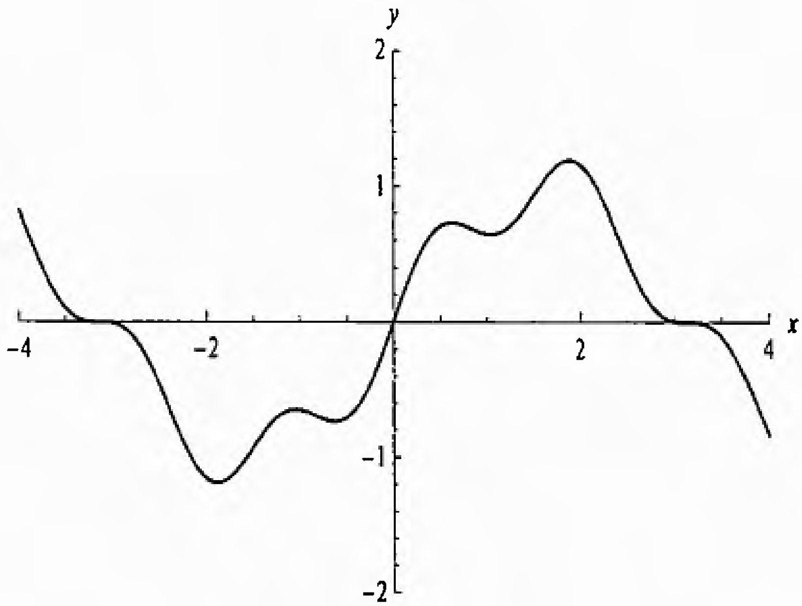

Figura 2.16 Suma de los dos primeros términos de la función de Riemann

Para la función $R(x)=\sum_{n=1}^{5}\frac{Sen(n^2x)}{n^2}$, se tiene la siguiente gráfica

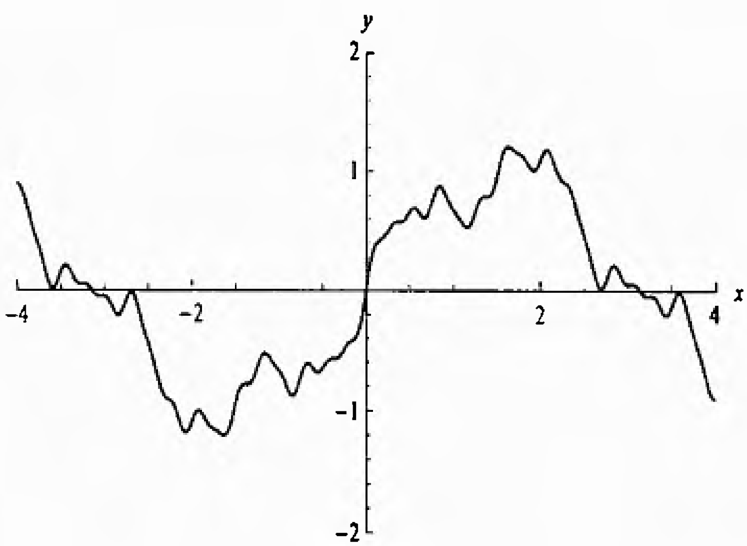

Figura 2 17 Suma de los cinco primeros términos de la función de Riemann.

Para la función $R(x)=\sum_{n=1}^{10}\frac{Sen(n^2x)}{n^2}$, se tiene la siguiente gráfica

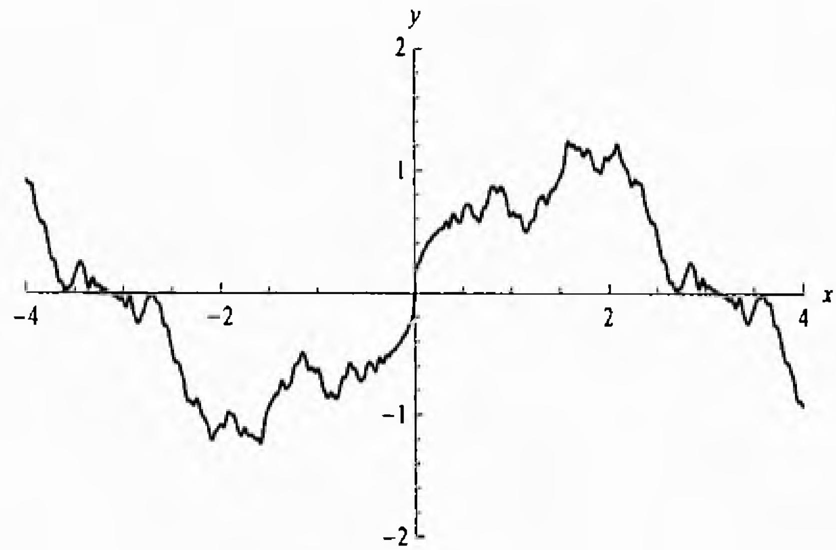

Figura 2.18 Suma de los diez primeros términos de Riemann

Nótese que a medida que n aumenta, se tiene que aumentan la cantidad de cuspides de la gráfica y en cada una de ellas no existe la derivada, a pesar de que la función sigue siendo continua La continuidad es, por supuesto, una consecuencia fácil del *m-test* de Weierstrass, pero la no diferenciabilidad, si tal cosa es posible, no es trivial

CAPÍTULO 3: PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO.

3.1 INTRODUCCIÓN

Esta sección inicia con el carácter epistemológico de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, continuando con la construcción de una función continua no diferenciable en un conjunto enumerable de puntos para, posteriormente, llegar a la construcción de una función continua y no diferenciable en punto alguno Finalmente, esta propuesta representa un recurso didáctico y bibliográfico con el cual tanto docentes como estudiantes pueden interactuar en la enseñanza y aprendizaje del tema en cuestión

En este mismo orden de ideas, en la actualidad, la mayor parte de los recurso bibliográfico con el que se cuenta para el estudio de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, se caracterizan por una perspectiva académica pura, de manera tal, que esta propuesta pretende incorporar una perspectiva Didáctica – Educativa en el tratamiento de estos tipos de funciones con la intención de que el estudio de este tema sea más significativo y que contemple el rigor académico y científico de esta disciplina

Adicionalmente, la propuesta pretende que se incorpore el estudio de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno en los estudios de la licenciatura en Matemática de nuestro pais, especificamente, este tema puede ser incorporado en un primer curso de Análisis Matemático

Sin embargo, en los distintos cursos donde se estudian los conceptos de continuidad y diferenciabilidad, los docentes deben ir abonando el terreno, paulatinamente, hacia una visualización más clara del asunto que hoy nos ocupa, es decir, se debe tratar de hacer más énfasis en las relaciones existentes entre la continuidad y la diferenciabilidad de manera que estas propiedades no pasen desapercibidas por los estudiantes dedicados al estudio de la Matemática en el país

3.2 ASPECTOS HISTÓRICOS QUE SUSTENTAN LA PROPUESTA

Antes de introducir los aspectos específicos de la propuesta se presenta una breve revisión histórica sobre algunos aspectos que favorecen a la misma, tales como el advenimiento del concepto de continuidad, la epistemología de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, entre otros

3 2.1 DEL RIGOR GEOMÉTRICO AL ALGEBRAICO Y ARITMÉTICO

La característica predominante en la Matemática del siglo XVIII era la falta de rigor en las demostraciones y la vaguedad con que se explicaban los conceptos, las demostraciones eran una mezcla de pruebas formales con consideraciones geométricas y físicas de los problemas Los principales argumentos de los matemáticos se centraban en el uso de la geometría y las comprobaciones experimentales a la luz de la realidad física

El inicio del siglo XIX se caracteriza por el logro de algunas metas que habían quedado pendiente por el débil rigor del estudio de la matemática en el siglo pasado, como lo fueron imponer un cierto orden y crear nuevos métodos que sustenten mejor el trabajo Es así que el rigor *geométrico* es sustituido por el *aritmético*, produciendo una *aritmetización de la matemática*, siendo la aritmetica la base en la que se fundamenta el origen de lo que hoy se conoce como Análisis Matemático

Toda esta insatisfacción, que se vivió antes del siglo XIX, unido a que las explicaciones de Newton y Leibniz referentes a la fundamentación del cálculo no fueron consideradas satisfactorias para el pensamiento de su época, se origino toda una polémica que desembocó en los trabajos de matemáticos como Bolzano (1781 – 1848), Cauchy (1789–1857), Abel (1802 – 1828), Dirichlet (1805 – 1859), Weierstrass (1815–1897) y Riemann (1826 – 1866) , entre otros

Por suerte estos matemáticos, que fueron un pilar fundamental en la creación del análisis matemático, no abandonaron del todo las representaciones geométricas, de manera que se distinguen dos aspectos en sus trabajos

1 El fundado sobre el principio de la posición el todo equivale a la suma de las partes

2 El fundado sobre el principio de la continuidad base para estudiar la realidad continua, aun en sus manifestaciones infinitesimales

3 2 2 EPISTEMOLOGÍA DE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO.

Durante todo el siglo XVIII se entendia como función continua toda expresión analitica en la que intervienen variables, constantes y funciones elementales, es decir, continuidad significaba de tener la misma expresión formal en todo su dominio

Las discusiones sobre la interpretación de esta definición de continuidad fueron motivadas por los problemas que se plantearon sobre ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y sus soluciones, cuando existian condiciones iniciales o de contorno

Uno de estos problemas fue el problema de la cuerda vibrante, para el cual una condición inicial natural es estirar la cuerda en un punto, lo que da lugar a una solución que se expresa por medio de una función no derivable en un punto y con diferenciales diferentes a cada lado del mismo

El problema de la cuerda vibrante consiste en determinar las ecuaciones que describen el movimiento de una cuerda fija en sus extremos, cuando ésta al ser estirada por un punto se suelta y empieza a vibrar La estructura general del planteamiento y resolución de este problema, considera que la cuerda flexible se ha tensado sobre el eje x y está sujeta de los extremos a los puntos, que sin pérdida de generalidad pueden ser $x = 0$ y $x = \pi$ (Ver la Figura 3 1)

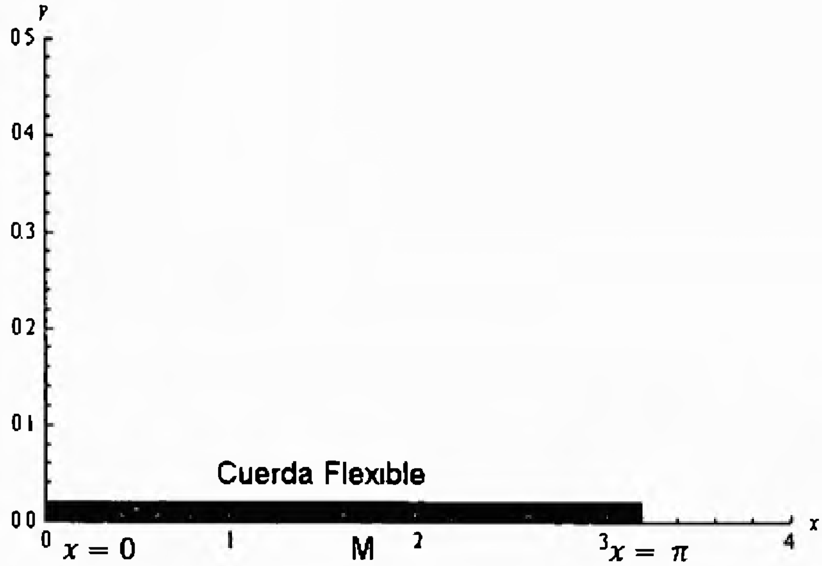

Figura 3 1 Cuerda flexible tensada sobre el eje X

Si la cuerda de la Figura 3 1 se levanta por un punto interior al intervalo abierto $(0, \pi)$, suponga, por el punto medio M, una representación que en su época se realizo, se muestra en la siguiente figura

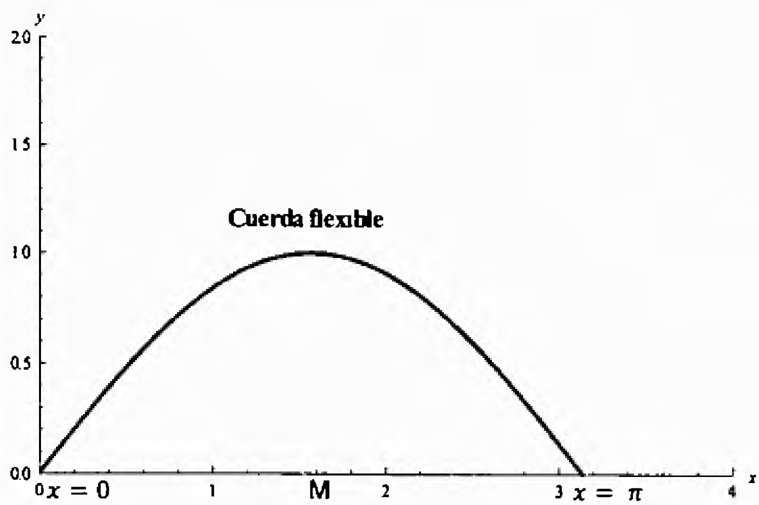

Figura 3 2· Cuerda flexible levantada en el punto medio M

La cuerda representa una cierta curva $y = f(x)$ en el plano XY, si se le deja en libertad de producir vibraciones en el mimo plano

El problema consiste en determinar su posición, velocidad y aceleración en cualquier instante

Para determinar la ecuación de movimiento se hacen varias suposiciones tendientes a simplificar el problema, estas son las siguientes

1 Las vibraciones solo son en la direccion del eje Y, esto es, el punto $(x_0, f(x_0))$ se moverá en la vibración únicamente sobre la recta $x = x_0$

2 La tensión T en magnitud es constante y su dirección es la de la recta tangente que claramente varía de punto a punto

3 La cuerda es homogénea y su densidad lineal de masa es $m = m(x)$

Con esta suposiciones la coordenada y depende sólo de x en el instante t, de manera que el desplazamiento de la cuerda desde su posición de equilibrio es dado por alguna funcion $y = y(x, t)$, además, las derivadas primera y segunda respecto al tiempo $\frac{\partial y}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ representan, respectivamente, la velocidad y aceleración de la vibración de la cuerda

Considerese el movimiento de un pedacito de cuerda que en su posicion de equilibrio tiene longitud Δx (Figura 3 3) Como la densidad lineal de masa es $m = m(x)$, se sigue que la masa del pedacito de cuerda es $m\,\Delta x$ y por la segunda ley de Newton, fuerza igual a masa por aceleración, se tiene que la fuerza transversal F que actua sobre el elemento de curda está dada por la ecuación diferencial parcial

$$F = m\,\Delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,, \qquad (1)$$

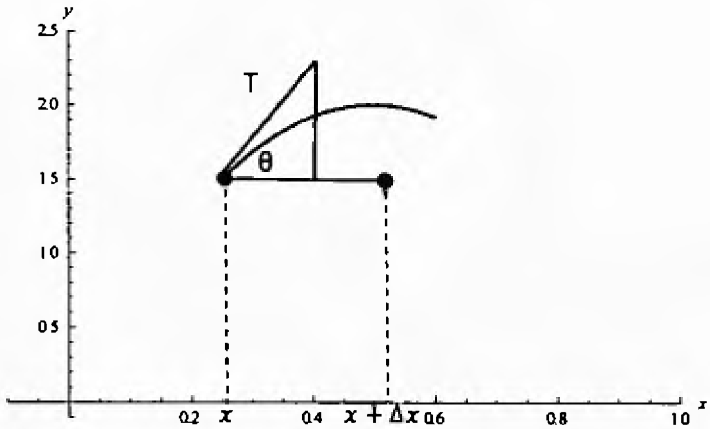

Figura 3 3 Tensión de una curva en direccion de la recta tangente.

Debido a que la cuerda es flexible, la tensión $T = T(x)$ en cualquier punto es dirigida a lo largo de la recta tangente y tiene por ordenada $T\, Sen\theta$, y como la tensión es la única fuerza que actua sobre la cuerda, entonces la fuerza transversal F es la diferencial de valores de $T\, Sen\theta$ en los extremos del elemento Δx, luego se obtiene que la ecuación (1), se transforma en la siguiente ecuación

$$\Delta(T\, Sen\theta) = m\, \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ , \qquad (2)$$

Si las vibraciones de la cuerda son relativamente pequeñas, es decir, si θ es pequeño, se sigue que $Sen\theta$ es aproximadamente igual a $Tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$, esto es por el hecho de que $Cos\theta \rightarrow 1$ cuando $\theta \rightarrow 0$, por lo cual la ecuación (2), se convierte en

$$\frac{\Delta(T\frac{\partial y}{\partial x})}{\Delta x} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ , \qquad (3)$$

Es claro que cuando $\Delta x \rightarrow 0$, el miembro izquierdo de la ecuación (3) representa la derivada parcial de $T \frac{\partial y}{\partial x}$ respecto a x, de manera que tal ecuación se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\,\frac{\partial y}{\partial x}\right) = m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ , \qquad (4)$$

De esta ecuación se obtiene $\frac{T}{m}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ y haciendo la constante $k^2 = \frac{T}{m}$, se obtiene finalmente la ecuación denominada Ecuación de Onda unidimensional, la cual esta dada por

$$k^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ , \qquad (5)$$

Una solución de la ecuación diferencial parcial (5) que sea de la forma $y(x,t)$ debe satisfacer las condiciones de fronteras e iniciales dadas por

Condiciones de frontera $\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(\pi,t) = 0 \end{cases}$

Condiciones iniciales $\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(t=0) = 0 \\ y(x,0) = f(x) \end{cases}$

Las condiciones de fronteras expresan la suposición de que los extremos de la cuerda permanecen fijos en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$, mientras que las condiciones iniciales aseguran que la cuerda no tiene movimiento cuando es liberada y que $y = f(x)$ es su forma inicial

Hasta aquí se ha logrado plantear el problema de la cuerda vibrante, ahora resolverlo significa determinar la función $y = f(x)$ que sea solucion de la ecuación diferencial (5) sujeta a las condiciones dadas Para ello observe lo siguiente

Utilizando el método de separación de variables y suponiendo la solución de la forma $y(x,t) = u(x)\,v(t)$, se tiene que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u''(x)v(t)$$

y

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u(x)v''(t)$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación diferencial (5), se obtiene

$$k^2 u''(x)v(t) = u(x)v''(t)$$

Separando las variables, se tiene

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{k^2}\frac{v''(t)}{v(t)} \quad ,(6)$$

El lado izquierdo es una función de x y el lado derecho es una funcion de t , ecuación que se cumple solamente si sus dos miembros son constantes, para facilitar los cálculos denotemos esta constante por $-\lambda$

De esta forma la ecuación (6) da lugar a dos ecuaciones diferenciales, tales como

Por un lado la ecuación diferencial ordinaria

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \ , \qquad (7)$$

Por otro lado, la ecuación diferencial ordinaria

$$v''(t) + \lambda k^2 v(t) = 0 \ , \qquad (8)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (7), se tiene que la ecuación característica de ella es

$$m^2 + \lambda = 0$$

De donde $m = \pm\sqrt{-\lambda}$, pero como la constante λ representa cualquier numero real, se tiene que

Si $\lambda = 0$, se tiene que $m = 0$, es una raiz de multiplicidad dos (2), de manera que en este caso la solución es de la forma $u(x) = C_1x + C_2$ Pero de las condiciones de fronteras $u(0) = 0 = u(\pi)$, se tiene que la unica solucion que satisface tales condiciones es la trivial, es decir, $u(x) = 0$

SI $\lambda < 0$, entonces las raices $m = \pm\sqrt{-\lambda}$ son reales y distintas, de manera que en este caso la solución de la ecuación diferencial es de la forma siguiente $u(x) = C_1e^{m_1x} + C_2\, e^{m_2\, x}$

Pero nótese que $u(0) = C_1 + C_2 = 0$, además, debe satisfacerse que $u(\pi) = C_1e^{m_1\pi} + C_2e^{m_2\pi} = 0$, de manera que ambas ecuaciones se satisfacen solamente en el caso de que $C_1 = 0 = C_2$, de modo que también la solución es la trivial $u(x) = 0$

Si $\lambda > 0$, entonces las raíces imaginarias conjugadas de la forma $m = \pm\,\iota\sqrt{\lambda}$, de manera que la solución general de la ecuación (7) es

$$u(x) = C_1Sen\sqrt{\lambda}\,x + C_2Cos\sqrt{\lambda}\,x$$

Utilizando las condiciones iniciales, se tiene que $u(0) = C_2 = 0$, la solución se reduce a

$$u(x) = C_1Sen\,\sqrt{\lambda}x$$

De la segunda condición de frontera, se tiene que $u(\pi) = 0$, se debe tener que $\sqrt{\lambda}\pi = n\,\pi$ para algún entero positivo n , es decir, $\lambda = n^2$ En otras palabras, λ debe ser igual a algunos de los numeros $1, 4, 9,$ A estos valores de λ se les llama valores propios del problema y a las soluciones correspondientes dadas por $Senx\ , Sen2x, Sen\ 3x,$ se les conoce como funciones propias

Pero, cualquier multiplo de ellas también es solucion, es decir, las soluciones pueden ser escritas como $C_1Senx\ , C_2Sen2x, C_3Sen\ 3x,$, por lo tanto, las correspondientes soluciones de (7) se pueden escribir sencillamente como

$$u_n(x) = Sen\,nx \quad , \qquad n = 1, 2, 3,$$

De manera similar se puede resolver la ecuación diferencial (8), en cuyo caso la ecuación caracteristica es

$$m^2 + \lambda k^2 = 0$$

Resolviendo la ecuacion caracteristica y realizando el mismo análisis para los valores de λ , se tiene que la solución general de la ecuación (8) es

$$v(t) = C_1Sen\,nkt + C_2Cos\,nkt$$

Luego, utilizando las condiciones de contorno $v'(0) = 0$, se obtienen las soluciones sencillas de la ecuación diferencial (8) dadas por

$$v_n(t) = Cos\,nkt$$

Recuerde que la solución de la ecuación que describe el movimiento de la cuerda es de la forma

$$y(x, t) = u(x)v(t)$$

Por lo que las soluciones de la ecuación de onda son de la forma siguiente

$$y_n(x,t) = Sen\, nx\ Cos\, nkt\ , n = 1, 2, 3,$$

También es válido escribir estas soluciones en la forma siguiente

$$y(x,t) = C_1 Sen\, x\ Cos\, kt + C_2 Sen\, 2x\ Cos\, 2kt + \quad + C_n Sen\, nx\ Cosnkt\ ,$$

ya que cualquier combinación lineal de multiplos de ellas también es solución

Más generalmente, cualquier serie infinita de la forma

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Sen\, nx\ Cos\, nkt\ ,$$

o de la forma

$$y(x,t) = C_1 Sen\, x\ Cos\, kt + C_2 Sen\, 2x\ Cos\, 2kt + \quad + C_n Sen\, nx\ Cosnkt + \quad ,$$

Es también una solución de la ecuación de onda

Finalmente, en el instante $t = 0$, nuestra solucion es la forma inicial de la cuerda, la cual viene dada por

$$f(x) = C_1 Sen\, x + C_2 Sen\, 2x + \quad + C_n Sen\, nx +$$

Ahora, surge una pregunta inevitable, ¿dónde está la función continua no diferenciable en este problema de la cuerda vibrante?, precisamente, la respuesta a esta interrogante esta en la función $f(x)$, la cual en su posición inician cuando $t = 0$, no muestra específicamente la forma de la figura 3 2, sino la forma de la siguiente figura

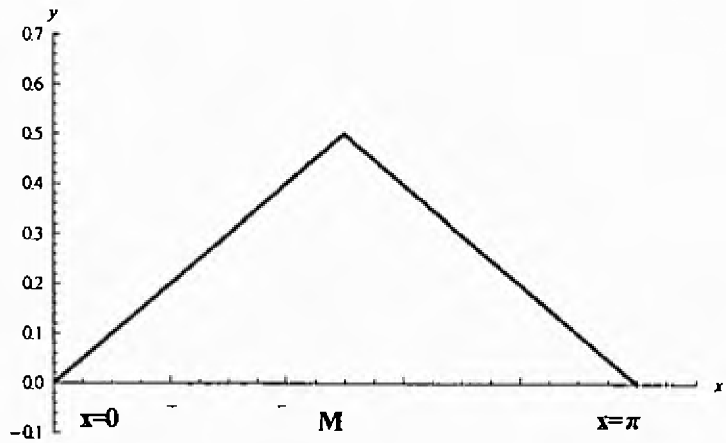

Figura 3 4: Representación real de la cuerda tensada por el punto medio.

Se sabe que la función que se muestra en la figura anterior no es diferenciable en el punto cuspide de la misma, por lo tanto, se esta ante la presencia de una funcion continua no diferenciable

Para reforzar esta idea de la no diferenciabilidad de la función en el problema de la cuerda vibrante, cabe señalar los trabajos de Euler, quien en un articulo "*Sobre la oscilación de cuerdas*", siguiendo a D´Alambert, utilizó una idea completamente distinta en cuanto a que funciones se podían admitir como curvas iniciales y, en consecuencia, como soluciones de una ecuación en derivadas parciales

Incluso, antes del debate sobre el problema que nos ocupa, en un trabajo de 1734, Euler aceptaba funciones formadas a partir de trozos de curvas conocidas e incluso las obtenidas dibujando curvas a pulso, de esta manera la curva (Figura 3 5) formada por un arco de parábola en el intervalo (a, c) y por un segmento de recta en el intervalo (c, b), constituía una funcion en su concepto

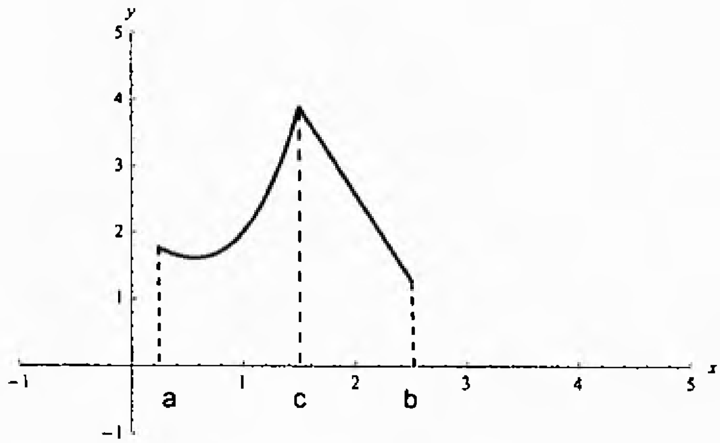

Figura 3.5 Función genérica en dos partes

Euler denominaba discontinuas a las curvas de la Figura 3 5, aunque en términos modernos son continuas con derivadas discontinuas, es decir, son funciones continuas y no diferenciables, precisamente en el punto $x = c$

Se sabe que en el siglo XVIII se manejaba la idea de que una función ha de estar dada por una unica expresión analitica, sin embargo, con la nueva idea que surge en la solución del problema de la cuerda vibrante se antepone un nuevo concepto de función, aceptando cualquier función definida por una fórmula $f(x)$ en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ y tomando

$$f(x + 2\pi) = f(x),$$

Como definición de la curva fuera del intervalo $(-\pi, \pi)$, o bién, sustituyendo π por l donde $2l$ es el periodo de repetición de la gráfica de la función

En 1748, Euler elaboró un método según el cual pueden admitirse como forma inicial de la cuerda vibrante, curvas descritas por una infinidad de expresiones analíticas no idénticas entre sí, a pesar de que en esta época tales curvas se les llamaba discontinuas por no obedecer a una unica ley o fórmula analítica (Cantoral Unza & Farfan Marquez, 2003)

Claramente Euler consideraba que las formas iniciales $f(x)$ de la curva podían ser funciones no derivables en punto alguno, es decir, funciones con cuspides

La razón de su interpretacion es clara por la situación fisica real, ya que al levantar la cuerda por un punto se formaria, en efecto, una gráfica como la que se muestra en Figura 3 4

Nótese que al considerar Euler una función formada por una infinidad de expresiones analiticas no identicas entre si, está dando origen a la construcción de funciones continuas con una infinidad de puntos donde no tienen derivadas

Al respecto, Euler escribió a D´Alambert " considerando tales funciones que no se sujetan a la ley de continuidad se abre ante nosotros una nueva ruta del análisis " (Cantoral Uriza &Farfán Márquez, 2003, p 131)

3.3 DISEÑO DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO.

Como resultado de esta investigación se presenta una Propuesta de Enseñanza de las Funciones Continuas y no Diferenciables en punto alguno, con un aspecto innovador, como lo es la construcción de este tipo de función apoyado en el software *Mathematica*

3.3.1 DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

El propósito fundamental de esta propuesta es incorporar la enseñanza de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno en el estudio de la licenciatura en Matemática de la Universidad de Panamá

Esta aplicación se recomienda hacer en un primer curso de Análisis Matemático, ya que en este momento los estudiantes manejen los conceptos de continuidad y diferenciabilidad

Lo que se propone es una estrategia para construir funciones continuas y no diferenciables en un número enumerable de puntos, a partir de dos curvas definidas en intervalos distintos que tienen en comun, precisamente, el punto donde no sean diferenciables

A partir de ellas se efectuará la traslación de estas curvas a intervalos subyacentes que muestren otras curvas no diferenciables en otros puntos de este nuevo intervalo, se continua de esta forma para generar una sucesión de puntos donde la función no sea diferenciable a pesar de que ella sea continua en todos ellos

Además, se propone el uso del *Software Mathematica 08* como un apoyo tecnológico, que se puede utilizar para interpretar el comportamiento grafico de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno

En esta tesis se proporciona un recurso didáctico y tecnológico que puede ser utilizado por los docentes de matemática para mejorar su trabajo en el aula de clases

3.3 2 CONSTRUCCIÓN DE UNA FUNCIÓN CONTINUA EN TODO $\mathbb{R}$ PERO NO DIFERENCIABLES EN TODO $\mathbb{Z}$

Se construirá primero una funcion continua en todos los números reales, pero que no sea diferenciable en los enteros pares, considerando, en primer lugar, la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x+3, & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \\ -x+7, & \text{si} \quad 2<x\le 4 \end{cases}$$

Se estudiará la continuidad de esta función en el punto $x = 2$, como sigue

Primero tenemos que $f(2) = 2 + 3 = 5$

Calculando los límites laterales, se tiene

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+3) = 2+3 = 5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-x+7) = -2+7 = 5$$

Como los límites laterales coinciden, se tiene que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5 = f(2)$$

Lo cual permite afirmar que la función es continua en $x = 2$, la siguiente figura muestra la gráfica de esta función

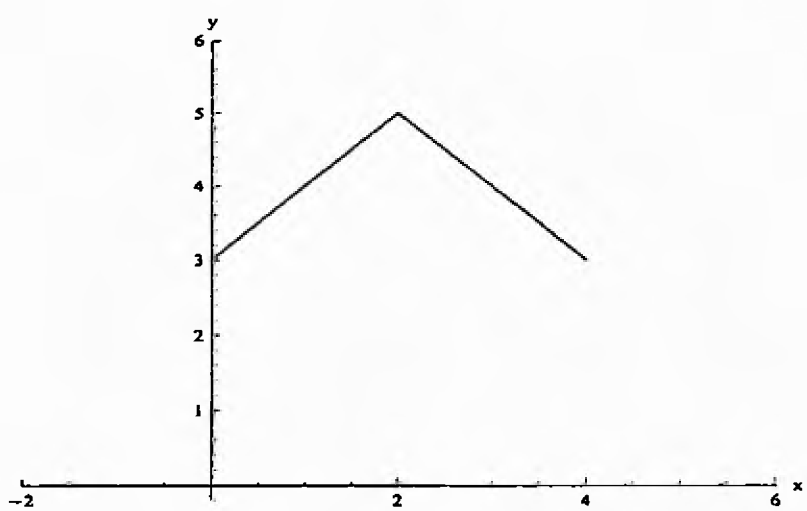

Figura 3.6: Función con cúspide sin derivada

Se prueba que la funcion no es diferenciable en $x = 2$, como sigue

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-\ f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h+3-x-3}{h} = 1 = f'(2^-)$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-\ f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-x-h+7+x-7}{h} = -1 = f'(2^+)$$

Como $f'(2^-) \neq f'(2^+)$, se concluye que la función $f(x)$ no es diferenciable en $x = 2$

Si se desea mover la grafica de esta función hacia la derecha y hacia la izquierda, se debe buscar, respectivamente, las funciones $f_1(x) = f(x-4)$ y $f_{-1}(x) = f(x+4)$, esto se hace seguidamente

Para la función que se desplaza hacia la derecha, se tiene

$$f_1(x) = f(x-4) = \begin{cases} x-4+3 \ , & \text{si} \quad 0 \le x-4 \le 2 \\ -(x-4)+7 \ , & \text{si} \quad 2 < x-4 \le 4 \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} x-1 \ , & \text{si} \quad 4 \le x \le 6 \\ -x+11, & \text{si} \quad 6 < x \le 8 \end{cases}$$

Para la función que se desplaza hacia la izquierda, se tiene

$$f_{-1}(x) = f(x+4) = \begin{cases} x+4+3 \ , & \text{si} \quad 0 \le x+4 \le 2 \\ -(x+4)+7 \ , & \text{si} \quad 2 < x+4 \le 4 \end{cases}$$

$$f_{-1}(x) = \begin{cases} x+7 \ , & \text{si} \quad -4 \le x \le -2 \\ -x+3 \ , & \text{si} \quad -2 < x \le 0 \end{cases}$$

Si a la gráfica de la figura 3 6, se le agregan las gráficas de estas dos ultimas funciones, se tiene una gráfica como la que sigue

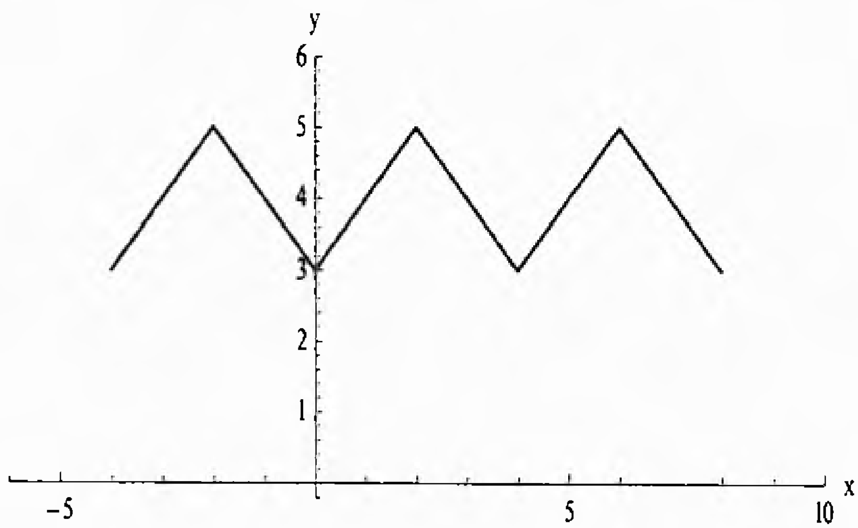

Figura 3 7 Función de más cúspides y abismos sin derivadas

3 3 3 CONSTRUCCIÓN DE UNA FUNCIÓN CONTINÚA EN TODO $\mathbb{R}$ PERO NO DIFERENCIABLE EN PUNTO ALGUNO.

Se define la función periódica $g(x)$ de la siguiente manera

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, g(x+1) = g(x) \text{ para todo } x$$

Observe el comportamiento de la gráfica de esta función, como sigue

Para $x = 0$, se tiene

$$= g(-3) = g(-2) = g(-1) = g(0) = 0 = g(1) = g(2) = g(3), =$$

Para $x = \frac{1}{2}$, se tiene

$$= g\left(-\frac{5}{2}\right) = g\left(-\frac{3}{2}\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = g\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(\frac{5}{2}\right) =$$

Para $x = 1$, se tiene

$$= g(-3) = g(-2) = g(-1) = g(0) = 0 = g(1) = g(2) = g(3) =$$

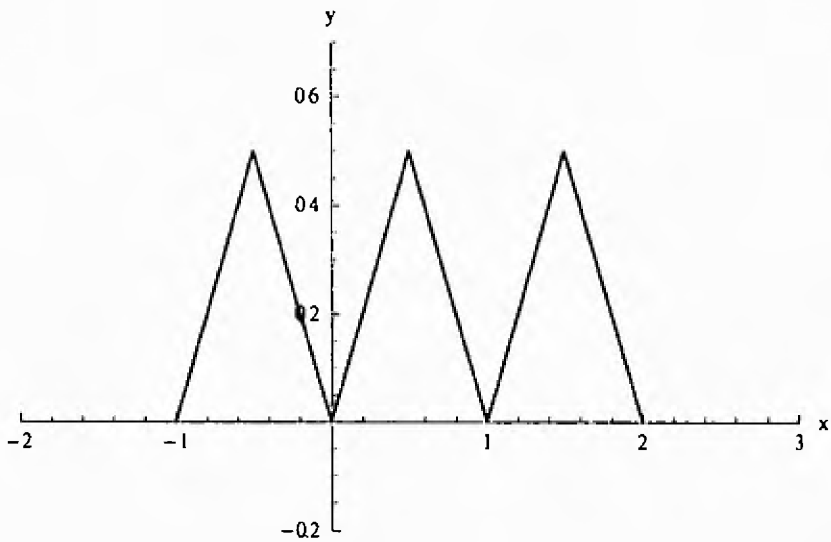

Figura 3 8 Función periódica $g(x)$

Nótese que la función $g(x)$ repite su comportamiento periódicamente en cada intervalo de enteros Considére ahora la serie geométrica convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$$

esta serie tiene como suma $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

El proposito ahora es construir, utilizando esta serie y la función $g(x)$, una serie de funciones convergente a una función $f(x)$ tal que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$, pero que no diferenciable en ningun punto Para ello observe lo siguiente

Sea $u_1(x) = g(x)$, este es nuestro primer término de la serie de funciones Se sabe que $g(x)$ es continua en $(0, 1)$, pero no es diferenciable en $\frac{1}{2}$, además, todo lo que suceda con esta función en el intervalo (0, 1) también estaría pasando en todos los intervalos de entero a entero La gráfica de $g(x)$ se muestra en la siguiente figura

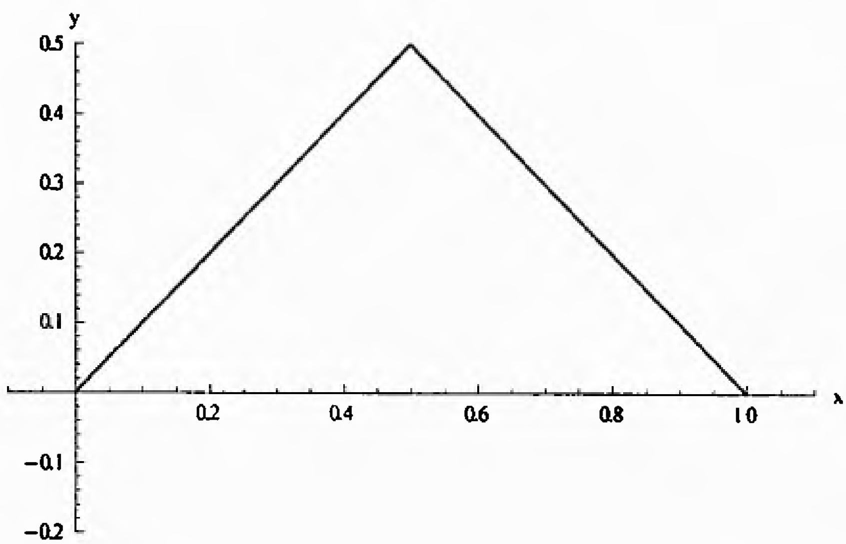

Figura 3 9: Primer término de la función construida

Considere las sumas parciales $s_1(x) = u_1(x) = g(x)$, de manera que

Tomando $s_2(x) = u_1(x) + u_2(x)$ con $u_2(x) = \frac{1}{2}\, g(2x)$, se tiene

$$S_2(x) = u_1(x) + u_2(x)$$

$$S_2(x) = g(x) + \frac{1}{2}\, g(2x)$$

$$S_2(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq 2x \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - 2x, & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq 2x \leq 1 \end{cases}$$

$$S_2(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} + \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} - x, & \text{si } \dfrac{1}{4} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por la periodicidad de la función $g(x)$, esta expresion se transforma des la siguiente manera

$$S_2(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} + \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} - x, & \text{si } \dfrac{1}{4} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ x - \dfrac{1}{2}, & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{4} \\ 1 - x, & \text{si } \dfrac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$S_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } \dfrac{1}{4} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{4} \\ 2 - 2x, & \text{si } \dfrac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En la siguiente figura se ilustra este resultado

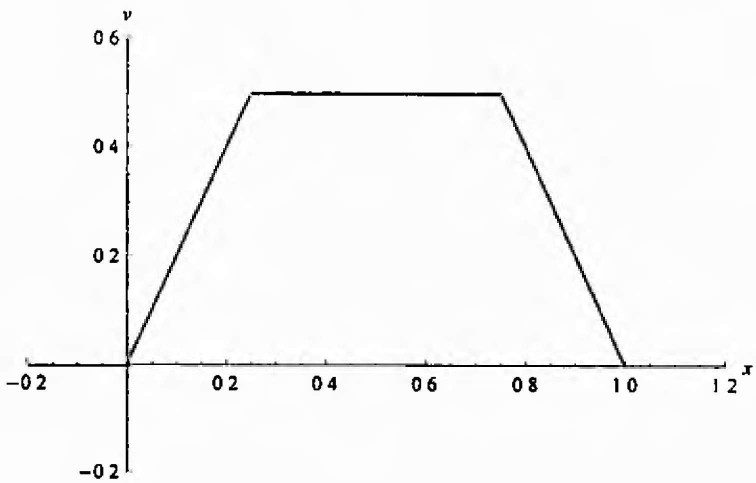

Figura 3 10 Suma de los dos primeros términos de la función construida

Continuando con el proceso de sumas parciales, se tiene

$$s_3(x) = s_2(x) + u_3(x)$$

$$s_3(x) = s_2(x) + \frac{1}{4}\, g(4x)$$

$$S_3(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2-2x, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} + \frac{1}{4}\begin{cases} 4x, & \text{si } 0 \leq 4x \leq \frac{1}{2} \\ 1-4x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq 4x \leq 1 \end{cases}$$

$$S_3(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2-2x, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} + \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}-x, & \text{si } \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$S_3(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2-2x, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} + \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}-x, & \text{si } \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ x-\frac{1}{4}, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2}-x, & \text{si } \frac{3}{8} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x-\frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4}-x, & \text{si } \frac{5}{8} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ x-\frac{3}{4}, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ 1-x, & \text{si } \frac{7}{8} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$S_3(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{1}{4} + x, & \text{si } \dfrac{1}{8} \le x \le \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} + x, & \text{si } \dfrac{1}{4} \le x \le \dfrac{3}{8} \\ 1 - x, & \text{si } \dfrac{3}{8} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ x, & \text{si } \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{5}{8} \\ \dfrac{5}{4} - x, & \text{si } \dfrac{5}{8} \le x \le \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{5}{4} - x, & \text{si } \dfrac{3}{4} \le x \le \dfrac{7}{8} \\ 3 - 3x, & \text{si } \dfrac{7}{8} \le x \le 1 \end{cases}$$

La siguiente figura ilustra este resultado

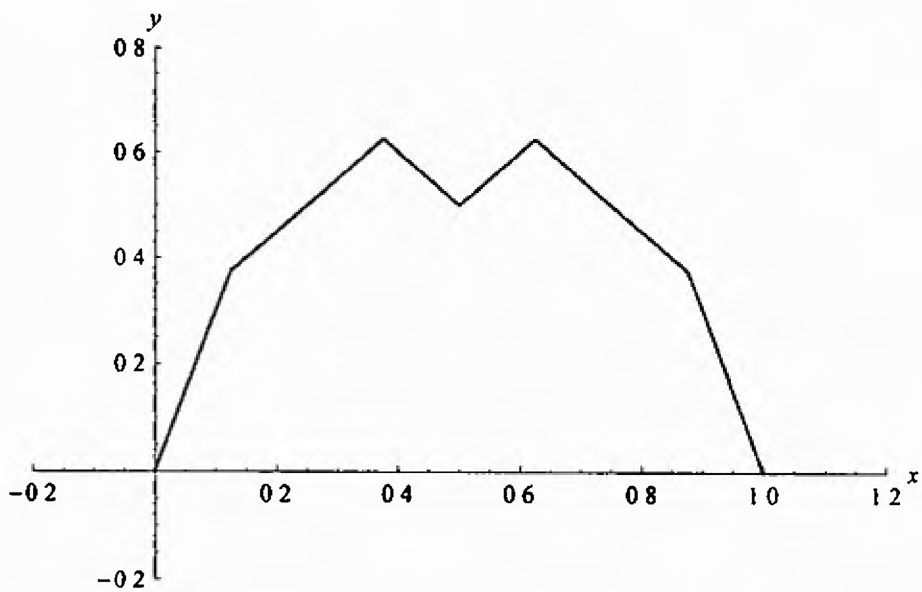

Figura 3 11 Suma de los tres primeros términos de la función construida

Continuando con este proceso de sumas parciales, se tiene:

$$S_4(x) = S_3(x) + u_4(x)$$

$$S_4(x) = S_3(x) + \frac{1}{8}\, g(8x)$$

$$s_4(x) = s_3(x) + \frac{1}{8}\begin{cases} 8x, & \text{si } 0 \leq 8x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 8x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq 8x \leq 1 \end{cases}$$

$$s_4(x) = s_3(x) + \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} - x, & \text{si } \frac{1}{16} \leq x \leq \frac{1}{8} \end{cases}$$

Por la periodicidad de la función, se tiene:

$$s_4(x) = s_3(x) + \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} - x, & \text{si } \frac{1}{16} \leq x \leq \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} + x, & \text{si } \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} - x, & \text{si } \frac{3}{16} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} + x, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{16} \\ \frac{3}{8} - x, & \text{si } \frac{5}{16} \leq x \leq \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} + x, & \text{si } \frac{3}{8} \leq x \leq \frac{7}{16} \\ \frac{1}{2} - x, & \text{si } \frac{7}{16} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{16} \\ \frac{5}{8} - x, & \text{si } \frac{9}{16} \leq x \leq \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} + x, & \text{si } \frac{5}{8} \leq x \leq \frac{11}{16} \\ \frac{3}{4} - x, & \text{si } \frac{11}{16} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} + x, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{13}{16} \\ \frac{7}{8} - x, & \text{si } \frac{13}{16} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ -\frac{7}{8} + x, & \text{si } \frac{7}{8} \leq x \leq \frac{15}{16} \\ 1 - x, & \text{si } \frac{15}{16} \leq x \ 1 \end{cases}$$

Sumando $s_3(x) + u_4(x)$, se obtiene

$$s_4(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} + 2x, & \text{si } \frac{1}{16} \leq x \leq \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} + 2x, & \text{si } \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{3}{16} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{3}{16} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2x, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{16} \\ \frac{5}{8}, & \text{si } \frac{5}{16} \leq x \leq \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} + x, & \text{si } \frac{3}{8} \leq x \leq \frac{7}{16} \\ \frac{3}{2} - 2x, & \text{si } \frac{7}{16} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + 2x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{16} \\ \frac{5}{8}, & \text{si } \frac{9}{16} \leq x \leq \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8}, & \text{si } \frac{5}{8} \leq x \leq \frac{11}{16} \\ 2 - 2x, & \text{si } \frac{11}{16} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{13}{16} \\ \frac{17}{8} - 2x, & \text{si } \frac{13}{16} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ \frac{17}{8} - 2x, & \text{si } \frac{7}{8} \leq x \leq \frac{15}{16} \\ 4 - 4x, & \text{si } \frac{15}{16} \leq x\ 1 \end{cases}$$

La gráfica de esta función se muestra en la siguiente figura:

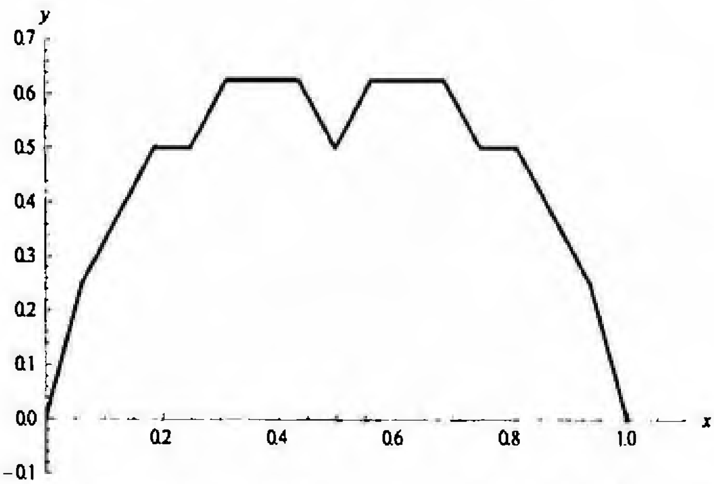

Figura 3.12: Suma de los cuatro primeros términos de la función construida.

Se pueden mostrar las gráficas de los primeros cuatro términos de sumas parciales, como se observa seguidamente.

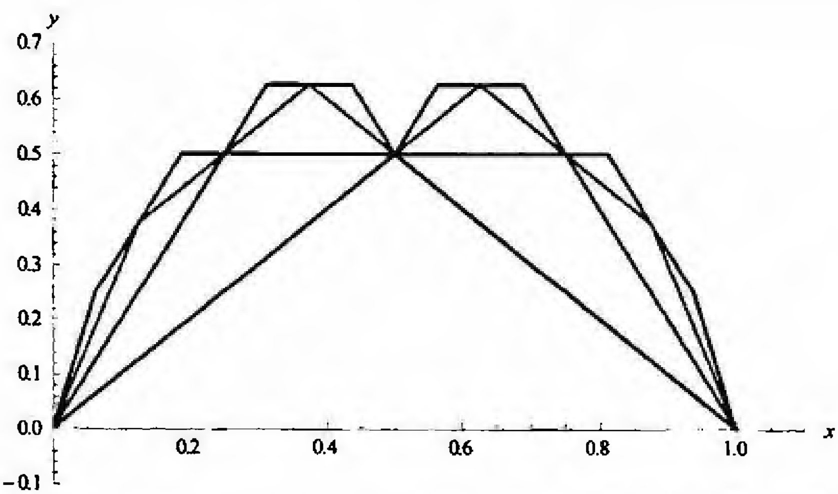

Figura 3.13: Primeros cuatro términos de sumas parciales de la función construida.

Si se continúa obteniendo los términos de la sucesión de sumas parciales, se pueden mostrar las gráficas de los siguientes términos, como se ve seguidamente:

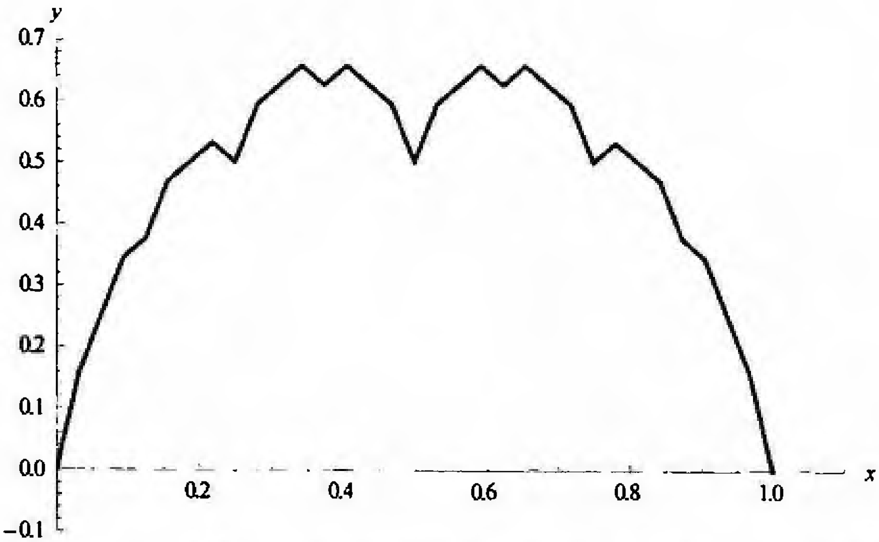

Figura 3.14: Suma de los cinco primeros términos de la función construida.

Además,

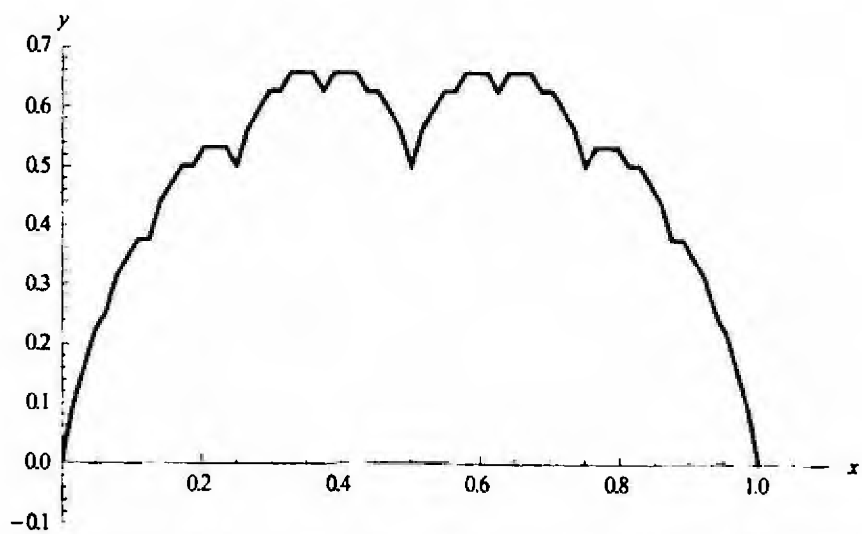

Figura 3.15: Suma de los seis primeros términos de la función construida.

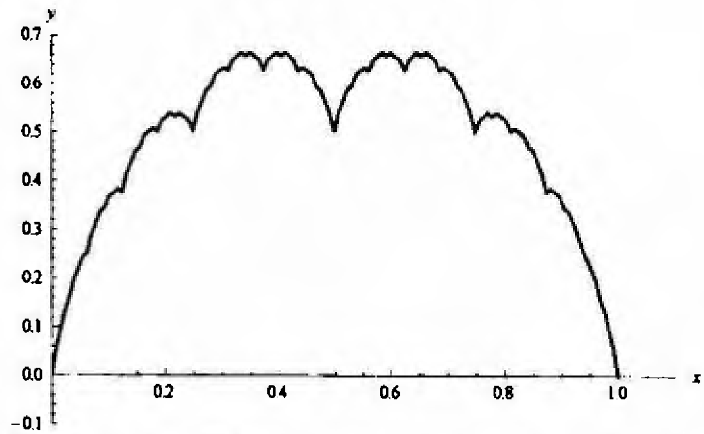

Figura 3.16: Suma de los siete primeros términos de la función construida.

Se pueden construir todas estas gráficas en un mismo plano cartesiano, sus gráficas se muestran en la siguiente figura.

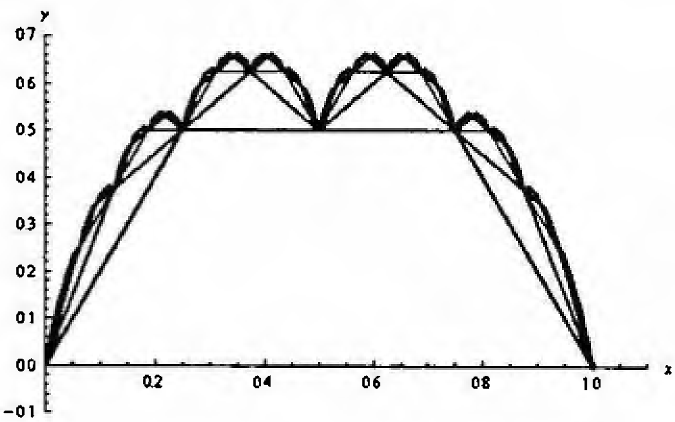

Figura 3.17: Primeros siete términos de sumas parciales de la función construida.

Continuando con este proceso se llega a construir la función definida de la siguiente manera:

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{2}g(2x) + \frac{1}{4}g(4x) + \frac{1}{8}g(8x) + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(2^n x)$$

Donde $g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ y $g(x+1) = g(x)$

Esta función se conoce con el nombre de *"blancmange function"* o curva Fractal de Takagi (1903)

Nótese que los términos del miembro derecho de la función $f(x)$ son funciones periódicas, las gráficas de estas funciones se muestran seguidamente

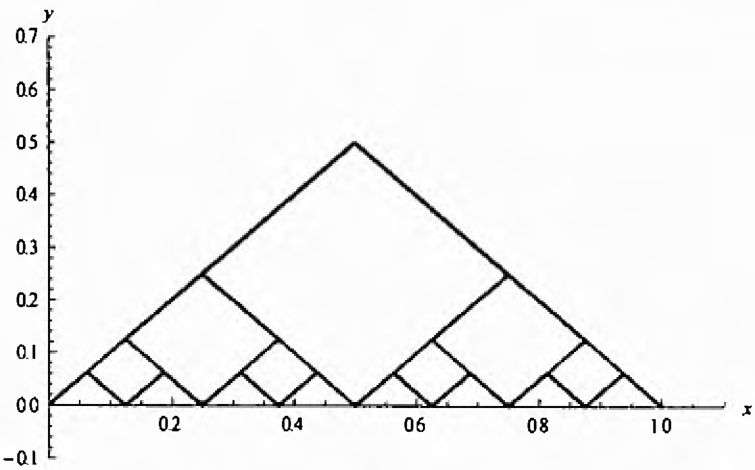

Figura 3 18: Primeros cuatro términos de la función construida

3 3.4 FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN PUNTO ALGUNO CON *MATHEMATICA*.

Esta sección presenta inicialmente los comandos basicos de *Mathematica* para graficar funciones, seguido de la visualización gráfica de la continuidad y no diferenciabilidad de funciones en un punto, así como las funciones de Weierstrass, Riemann y Van Der Waerden, todos apoyados con *Mathematica*, para una mejor comprensión del tema de estudio, en esta oportunidad

3.3.4 1 COMANDOS BÁSICOS DE *MATHEMATICA* PARA GRAFICAR FUNCIONES

Para graficar las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno con el Software *Mathematica* se requieren fundamentalmente los siguientes comandos

Tabla 1 Comandos básicos de *Mathematica* para graficar funciones.

COMANDO	FUNCIONES QUE REALIZA
$Plot\ [f(x), \{x, a, b\}]$	Muestra la gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo desde a hasta b en el eje x
$AxesLabel\ \rightarrow \{"x", "y"\}$	Marca los ejes coordenados
$PlotRange \rightarrow \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$	Muestra la gráfica en los rangos de x desde a hasta b y los de y desde c hasta d
$Plot\ [\{f(x), g(x)\}, \{x, a, b\}]$	Muestra la gráfica de la función $f(x)$ y $g(x)$ ambas en el intervalo desde a hasta b en el eje x, pueden ampliarse de la misma forma la cantidad de funciones a graficar
$AspectRatio \rightarrow Automatic$	Gráfica usando las mismas escalas en los ejes
$f[x\_] = \mathrm{If}[x \geq c, g(x), \mathrm{h}(x)]$ $Plot[f[x], \{x, a, b\}]$	Muestra la gráfica de una función definida en dos tramos, la función $g(x)$ se grafica para las $x \geq c$, mientras que la otra en el resto de la recta
$f[x\_] = \mathrm{Wich}[a \leq x \leq b, g(x), c \leq x \leq d, h(x)]$ $Plot[f[x], \{x, a, b\}]$	Muestra la gráfica de una función $g(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ y la gráfica de la función $h(x)$ en el intervalo $c \leq x \leq d$ Esta sintaxis se puede ampliar para una función definida en una infinidad de intervalos

EJEMPLO 3.1. Construya la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x$ de manera que la gráfica se muestre en el eje x en el intervalo $[-3, 3]$ y los rangos tanto en el eje horizontal como vertical en el intervalo de $[-5, 5]$

Desarrollo

La sintaxis requerida es la siguiente

$$\text{Plot}[\{x^3 - 3x\}, \{x, -3{,}3\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{x,y}\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{-3{,}3\}, \{-3{,}3\}\}, AspectRatio \rightarrow Automatic]$$

La grafica se muestra en la siguiente figura

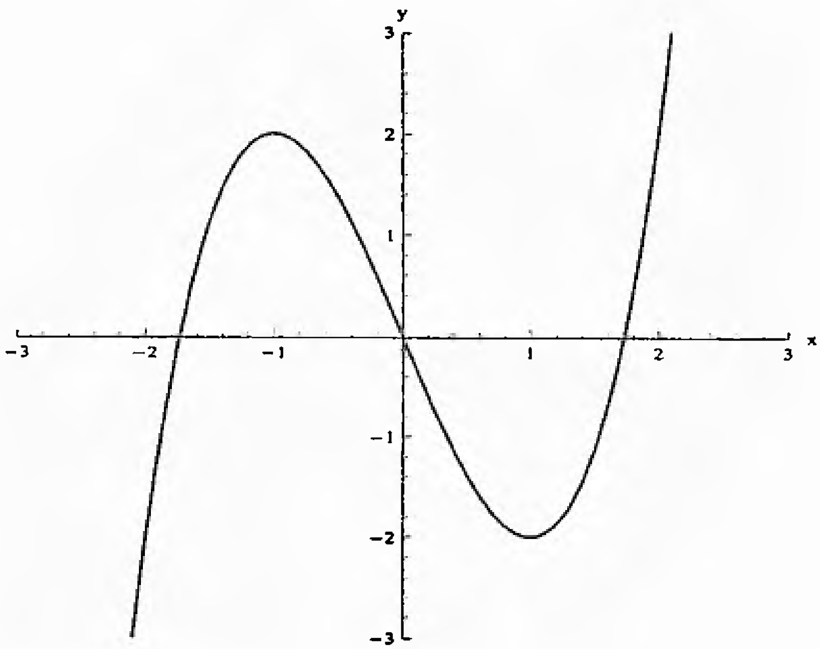

Figura 3 19· Función $x^3 - 3x$

EJEMPLO 3 2: Construir las gráficas de las ecuaciones

$$y^2 - x - 1 = 0 \ , 2y^2 - x - 5 = 0$$

Desarrollo

La sintaxis es la siguiente

$$\text{Plot}[\{\sqrt{x+1}, -\sqrt{x+1}, \sqrt{\tfrac{x+5}{2}}, -\sqrt{\tfrac{x+5}{2}}\}, \{x, -6{,}6\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"x"}, \text{"y"}\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{-6{,}6\}, \{-4{,}4\}\}]$$

La siguiente figura muestra las gráficas de las ecuaciones

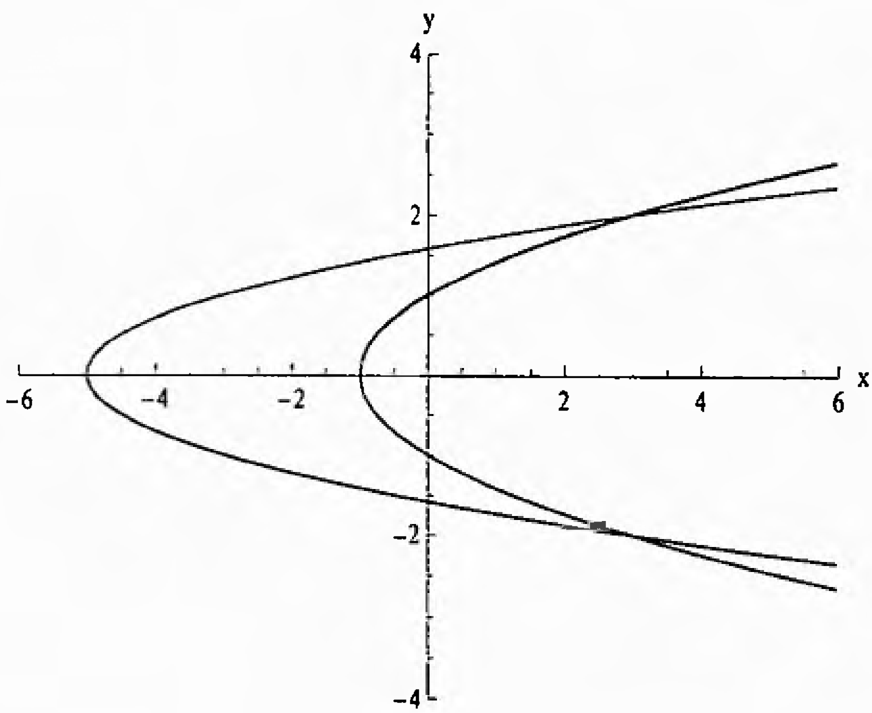

Figura 3 20· Parábolas $y^2 - x - 1 = 0, \quad 2y^2 - x - 5 = 0$

EJEMPLO 3.3: Construir la gráfica de la funcion definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - n, & \text{si } |x - n| < \dfrac{1}{2} \\ 0, & \text{si } x = n + \dfrac{1}{2} \end{cases}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

Solución

Esta función es llamada función diente de serrucho, la sintaxis para su construcción es la siguiente

$$\text{Plot}[x - \text{Round}[x], \{x, -3,3\}, \text{AxesLabel} \to \{\text{"x"}, \text{"y"}\}, \text{PlotRange} \to \{\{-3,3\}, \{-2,2\}\}, \text{AspectRatio} \to \text{Automatic}]$$

Su gráfica se muestra en la siguiente figura

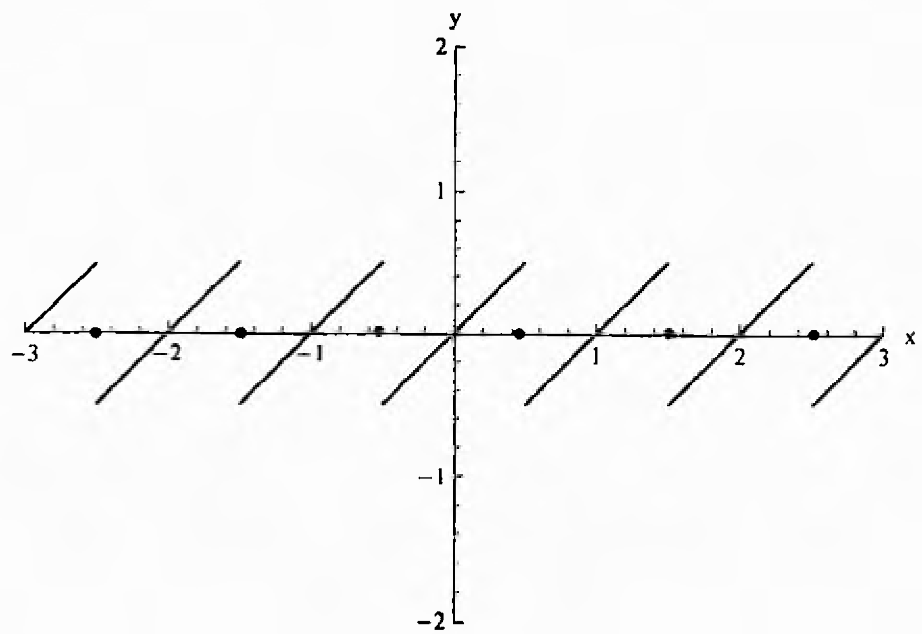

Figura 3 21. Funcion Diente de Serrucho

3.3.4.2 VISUALIZACIÓN GRÁFICA DE LA CONTINUIDAD Y LA NO DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES EN UN PUNTO

En el capitulo 2 se examinaron algunos ejemplos de funciones donde se probó analíticamente su continuidad en un punto y su no diferenciabilidad en el mismo, en esta sección se desea utilizar el *Software Mathematica* para construir la gráfica de éstas funciones y las gráficas de sus funciones derivadas, a fin de poder visualizar la continuidad y la no diferenciabilidad de tales funciones en los puntos particulares

EJEMPLO 3 4: Visualice gráficamente la continuidad de la función $f(x) = |x|$ en el origen y la no diferenciabilidad de la misma en dicho punto

Solución

Construyase la grafica de la función dada con la siguiente sintaxis

$$\text{Plot}[\sqrt{x^2}, \{x, -4,4\}, \text{AxesLabel} \to \{\text{"x"}, \text{"y"}\}, \text{PlotRange} \to \{\{-4,4\}, \{-1,4\}\}]$$

La gráfica es la siguiente

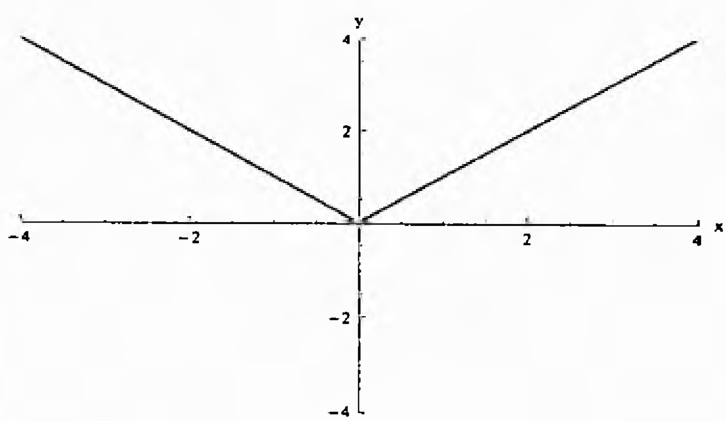

Figura 3 22· Función $|x|$.

La función dada se puede definir de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces la función derivada de esta función se define por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para construir la gráfica de la función derivada se utiliza la siguiente sintaxis

$$\text{Plot[If}[x \geq 0,1,-1], \{x,-3,3\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"x"}, \text{"y"}\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{-3,3\},\{-2,2\}\}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}]$$

La gráfica de la derivada se muestra en la siguiente figura

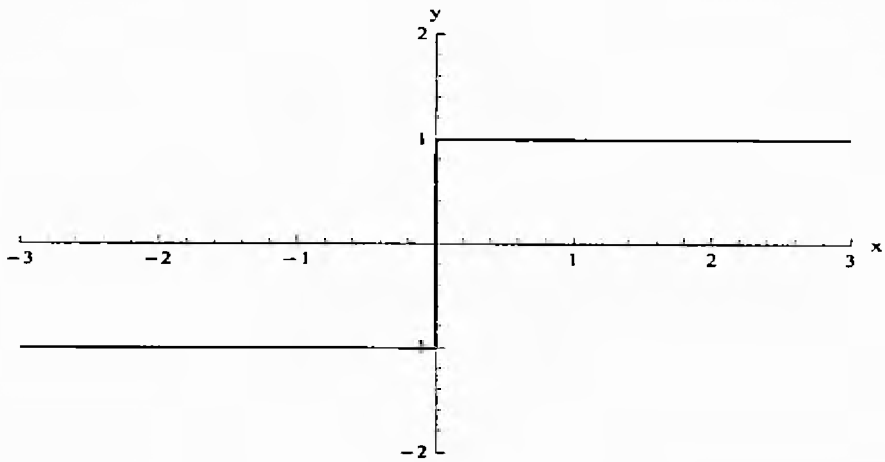

Figura 3.23: Derivada de la función $|x|$

Nótese que la gráfica de la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, mientras que la figura anterior muestra claramente la discontinuidad de la función derivada en el referido punto, es obvio que la misma muestra una discontinuidad de salto

EJEMPLO 3.5: Visualice gráficamente la continuidad de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el origen y la no diferenciabilidad de la misma en dicho punto.

Solución

Constrúyase la gráfica de la función dada con la siguiente sintaxis:

$$\text{Plot}[\text{If}[x \leq 0, -(x^2)^{1/6}, x^{1/3}], \{x, -3,3\}, \text{AxesLabel} \to \{x, y\}, \text{PlotRange} \to \{\{-3,3\}, \{-3,3\}\}, \text{AspectRatio} \to \text{Automatic}]$$

La gráfica de esta función se ilustra en la siguiente figura:

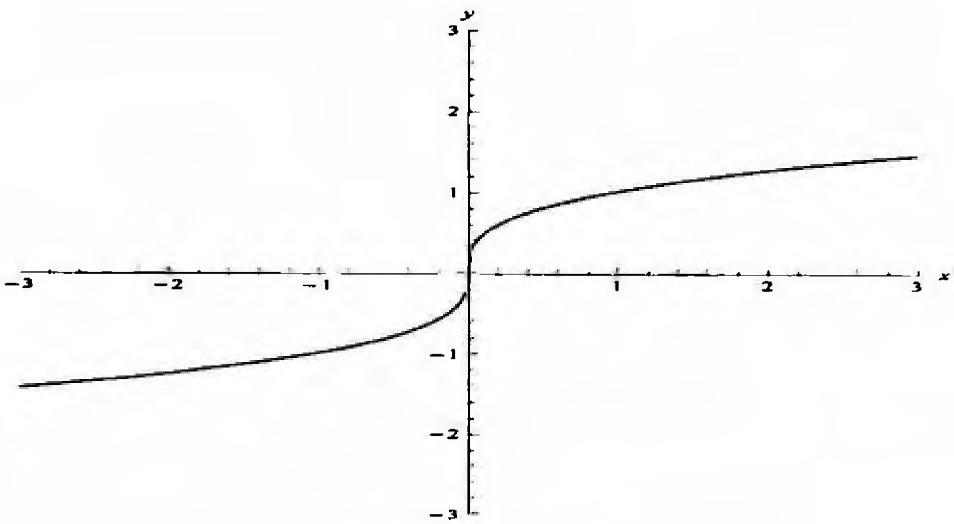

Figura 3.24: Función $\sqrt[3]{x}$.

Es claro que esta función es continua en el origen, ya que los límites laterales en el punto $x = 0$ coinciden con la imagen de la función.

La derivada de la función dada se define como $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$, con la siguiente sintaxis se construye la gráfica de la función derivada:

$$\text{Plot}[\tfrac{1}{3}(\sqrt[6]{x^2})^{-2}, \{x, -3{,}3\}, \text{AxesLabel} \to \{"x", "y"\}, \text{PlotRange} \to \{\{-3{,}3\}, \{-1{,}3\}\}, \text{AspectRatio} \to \text{Automatic}]$$

La gráfica de la función derivada se muestra en la siguiente figura, en cuyo caso se presenta una discontinuidad esencial en $x = 0$

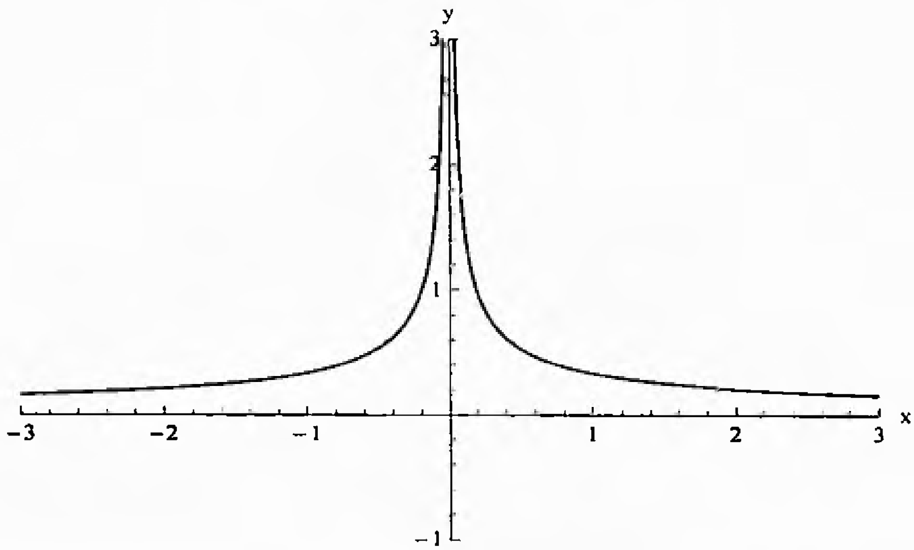

Figura 3 25: Derivada de la función $\sqrt[3]{x}$.

EJEMPLO 3.6: Visualice la continuidad de la función dada en el punto $x = 1$ y la no diferenciabilidad de la función derivada en este punto

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x < 1 \\ 5x - 8, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

La sintaxis requerida es la siguiente

$$f[\text{x\_}] = \text{If}[x \geq 1{,}5x - 8, x^2 - 4]$$

$$\text{Plot}[f[x], \{x, -5{,}5\}, \text{AxesLabel} \to \{"x", "y"\}, \text{PlotRange} \to \{\{-5{,}5\}, \{-5{,}5\}\}]$$

La gráfica de esta funcıon se muestra en la sıguıente figura

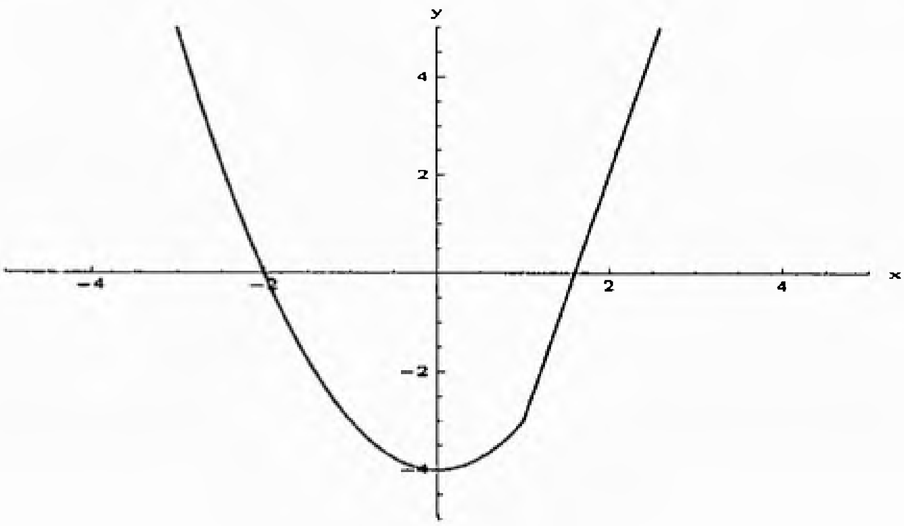

Fıgura 3 26: Función $\begin{cases} x^2-4, & \text{sı } x<1 \\ 5x-8, & \text{sı } x\geq 1 \end{cases}$

La sıntaxıs para la grafica de estos tıpos de funcıones puede ser dada sın definır prevıamente la función, en su lugar, se coloca tal definıción en la sıntaxıs donde se va a graficar

En la sıguıente gráfica se ılustra esta sıtuación, la cual es necesarıa para graficar cıertas funcıones que no permıten ser definıdas en un solo tramo

La función derıvada de la función dada es la sıguıente

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{sı } x < 1 \\ 5, & \text{sı } x \geq 1 \end{cases}$$

La gráfica de la función derıvada se construye con la sıguıente sıntaxıs

$$\text{Plot}[\text{If}[x \geq 1{,}5{,}2x], \{x, -3{,}3\}, \text{AxesLabel} \to \{\text{"x"}, \text{"y"}\}, \text{PlotRange} \\ \to \{\{-3{,}3\}, \{-4{,}6\}\}, \text{AspectRatıo} \to \text{Automatıc}]$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la funcion derivada

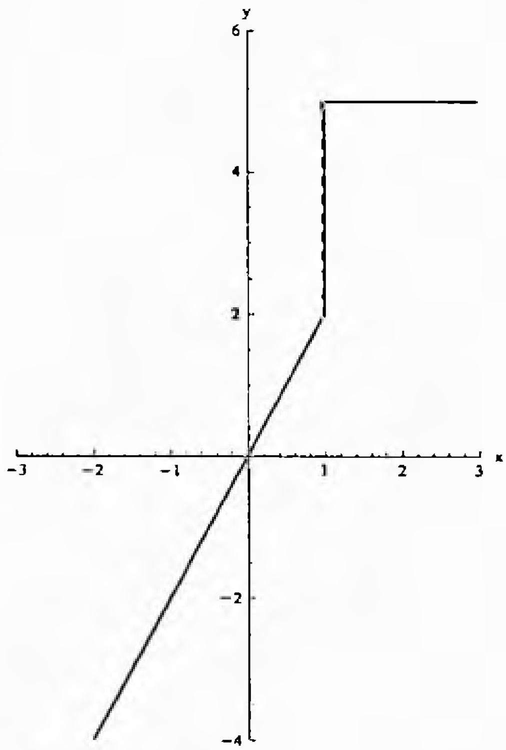

Figura 3.27: Derivada de la función $\begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x < 1 \\ 5x - 8, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Nótese que la gráfica de la función derivada muestra una discontinuidad de salto en el punto $x = 1$

3.3.4.3 LA FUNCIÓN DE WEIERSTRASS CON *MATHEMATICA*.

La función de Weierstrass $f\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} Cos[15^{i}\pi x]$$

Las gráficas de los primeros términos de la serie que define la función de Weierstrass se muestran en las siguientes figuras

Por efectos de simplificación y notación se le llama $f_k(x)$ a los términos de la serie anterior, de manera que

Para $k = 0$ el primer término de la función de Weierstrass está dado por

$$f_0(x) = Cos[15\pi x]$$

La sintaxis para graficar esta función es la siguiente

Plot[Cos[$\pi * x$], {x, −2,2}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {{−2,2}, {−2,2}}]

Su grafica se muestra en la siguiente figura

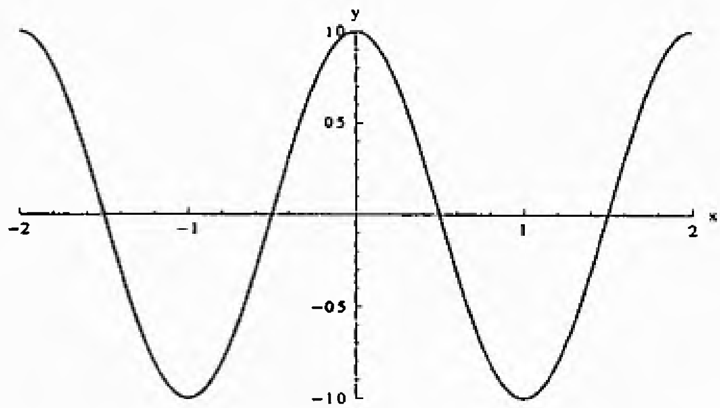

Figura 3.28 Primer término de la función de Weierstrass.

Para $k = 1$, el segundo término de la función de Weierstrass está dado por

$$f_1(x) = \frac{2}{3}Cos[15\pi x]$$

La sintaxis para graficar esta función es la siguiente

Plot[$\frac{2}{3}$Cos[15 * π * x], {x, −2,2}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {{−2,2}, {−1,1}}]

Su gráfica se muestra en la siguiente figura:

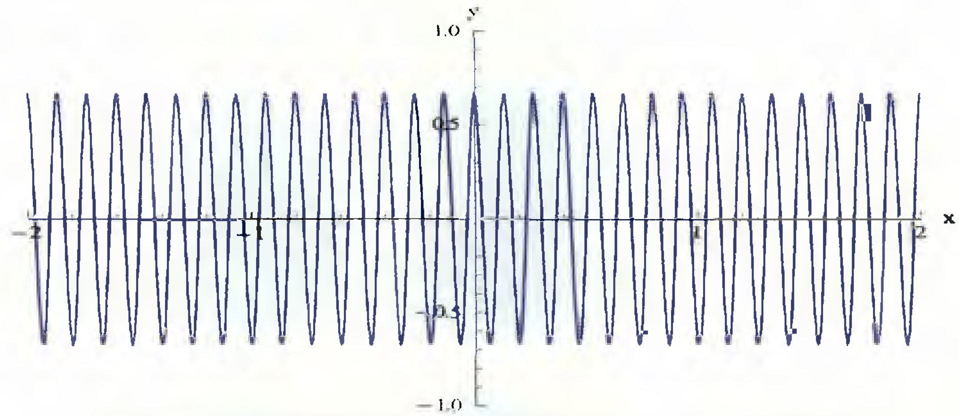

Figura 3.29: Segundo término de la función de Weierstrass.

Para $k = 2$, el tercer término de la función de Weierstrass está dado por:

$$f_2(x) = \frac{4}{9}Cos[225\pi x]$$

La sintaxis para graficar esta función es la siguiente:

$$\text{Plot}[\frac{4}{9}\text{Cos}[225 * \pi * x], \{x, -2,2\}, \text{AxesLabel} \to \{"x", "y"\}, \text{PlotRange} \to \{\{-2,2\}, \{-1,1\}\}]$$

Su gráfica se muestra en la siguiente figura:

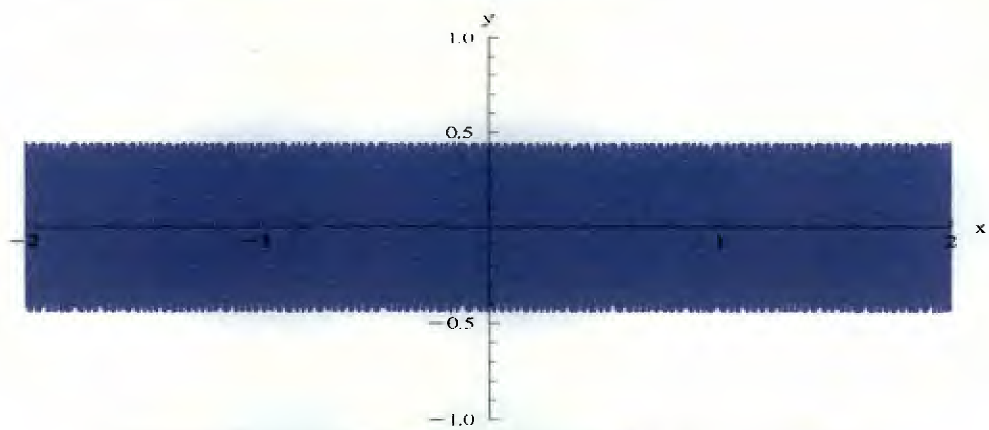

Figura 3.30: Tercer término de la función de Weierstrass.

Cabe señalar que las gráficas anteriores corresponde a los primeros tres (3) términos de la serie que define la función de Weierstrass; Sin embargo, las gráficas de las sumas parciales de cada uno de ellos es la de interés en la presente tesis. De manera que las gráficas que se construyen seguidamente, muestran algunos términos de la sucesión de sumas parciales.

La suma de los dos (2) primeros términos es la función definida por:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{1} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} Cos[(15)^{i}\pi x]$$

La sintaxis para graficar es la siguiente:

$$\text{Plot}\left[\sum_{i=0}^{1} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} \text{Cos}[(15)^{i} * \pi * x], \{x, -2,2\}, \text{AxesLabel} \to \{\text{"x"}, \text{"y"}\}, \text{PlotRange} \to \{\{-2,2\}, \{-2,2\}\}\right]$$

Su gráfica se muestra en la siguiente figura:

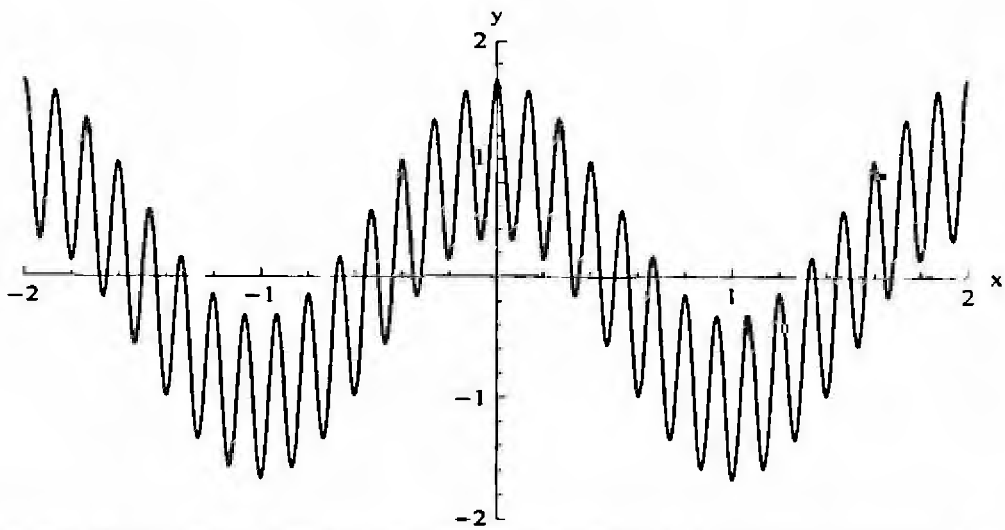

Figura 3.31: Suma de los dos primeros términos de la función de Weierstrass.

La suma de los tres (3) primeros términos es la función definida por:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} Cos[(15)^{i}\pi x]$$

La sintaxis para graficar es la siguiente:

$$\text{Plot}\left[\sum_{i=0}^{2} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{i} \text{Cos}[(15)^{i} * \pi * x]\right], \{x, -2{,}2\}, \text{AxesLabel} \to \{\text{"x"}, \text{"y"}\}, \text{PlotRange} \to \{\{-2{,}2\}, \{-2{,}2\}\}]$$

Su gráfica se muestra en la siguiente figura:

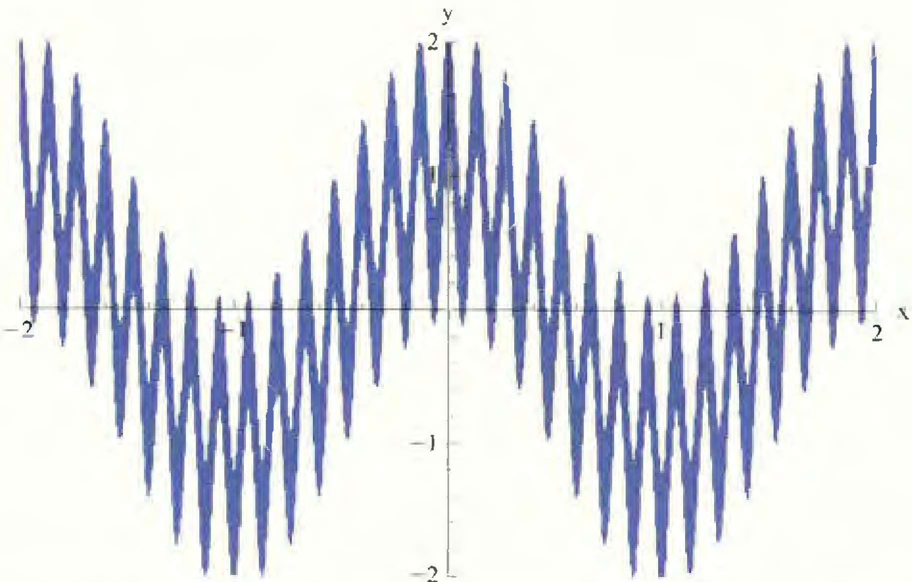

Figura 3.32: Suma de los tres primeros términos de la función de Weierstrass.

La suma de los ocho (8) primeros términos es la función definida por:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{7} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{i} Cos[(15)^{i}\pi x]$$

La sintaxis para graficar es la siguiente:

$$\text{Plot}\left[\sum_{i=0}^{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}\text{Cos}[(15)^{i} * \pi * x], \{x,-2,2\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{"x","y"\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{-2,2\},\{-2,2\}\}\right]$$

Su gráfica se muestra en la siguiente figura:

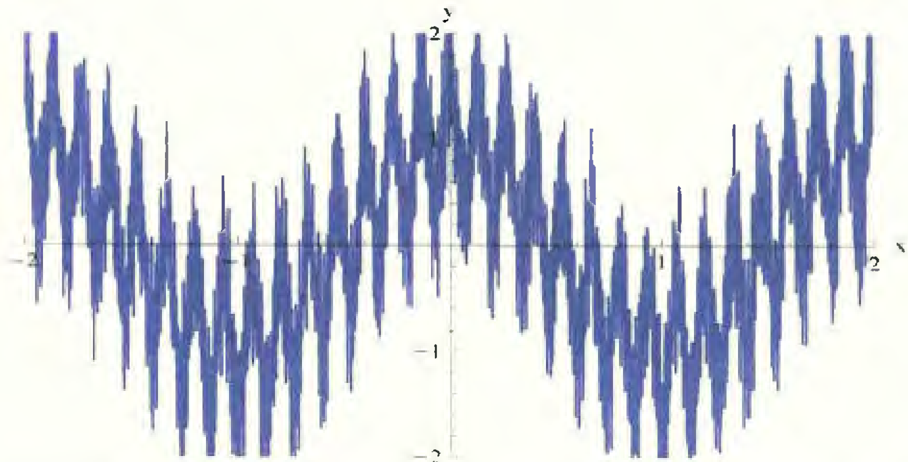

Figura 3.33: Suma de los ocho primeros términos de la función de Weierstrass.

Nótese que a medida que se incrementan los términos de la función de Weierstrass se incrementan las cúspides de la gráfica, de manera que cuando se hace crecer indefinidamente las sumas se tienen una gráfica que no posee derivada en punto alguno.

3.3.4.4 LA FUNCIÓN DE RIEMANN CON *MATHEMATICA*.

La función de Bernard Riemann, se define por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sen(n^2x)}{n^2},$$

Se construirán las gráficas de los tres primeros términos que define la serie anterior, como sigue

Para $n = 1$, se tiene la función definida por

$$f(x) = Sin[x]$$

La sintaxis para hacer la gráfica es la siguiente

```
Plot[Sin[x], {x, -4π, 4π}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {{-4π, 4π}, {-2,2}}]
```

Su gráfica se muestra en la siguiente figura

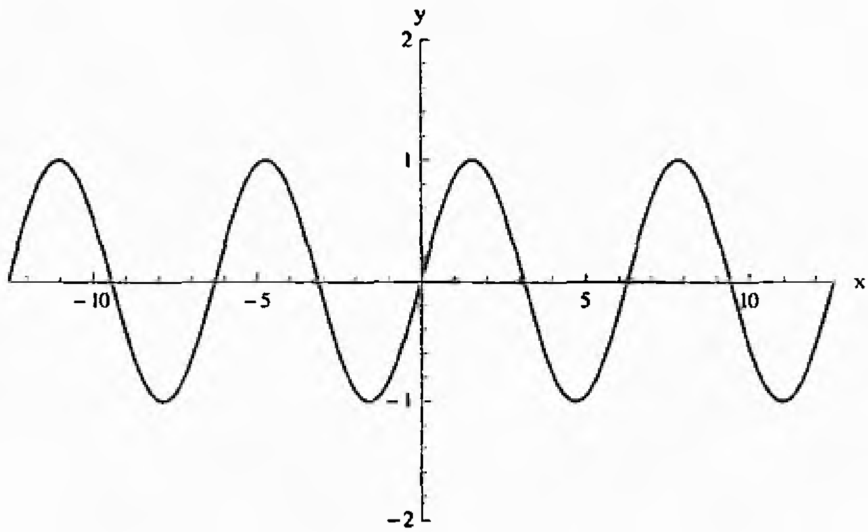

Figura 3.34: Primer término de la función de Riemann

Para $n = 2$, se tiene la función definida por

$$f(x) = \frac{Sin[4x]}{4}$$

La sintaxis para hacer la gráfica es la siguiente:

$$\text{Plot}\left[\frac{Sin[4x]}{4}, \{x, -4\pi, 4\pi\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{"x", "y"\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{-4\pi, 4\pi\}, \{-0.5, 0.5\}\}\right]$$

Su gráfica se muestra en la siguiente figura:

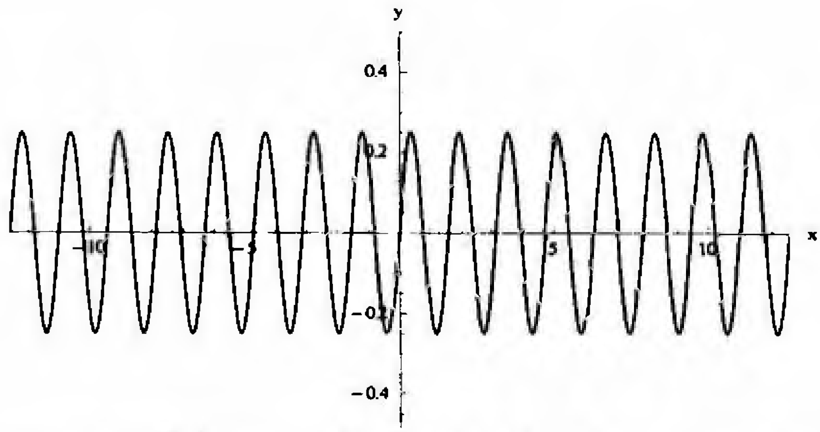

Figura 3.35: Segundo término de la función de Riemann.

Para $n = 3$, se tiene la función definida por:

$$f(x) = \frac{Sin[9x]}{9}$$

La sintaxis para hacer la gráfica es la siguiente:

$$\text{Plot}\left[\frac{Sin[9x]}{9}\right], \{x, -4\pi, 4\pi\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{"x", "y"\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{-4\pi, 4\pi\}, \{-0.2, 0.2\}\}]$$

Su gráfica se muestra en la siguiente figura:

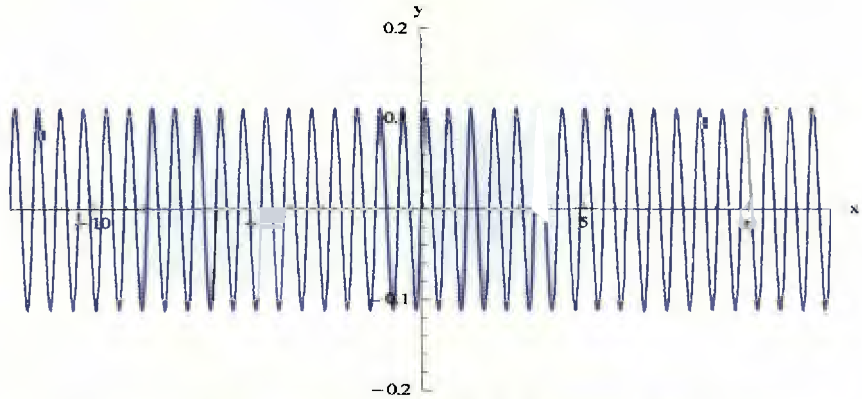

Figura 3.36: Tercer término de la función de Riemann.

Ahora, véanse las gráficas de las sucesiones de sumas parciales de la función de Riemann.

Para la función $f(x)=\sum_{n=1}^{2}\frac{Sen(n^2x)}{n^2}$, la sintaxis utilizada en el programa es:

$$\mathrm{Plot}f(x)\left[\sum_{n=1}^{2}\frac{Sen(n^2x)}{n^2},\{x,-2\pi,2\pi\},\mathrm{AxesLabel}\rightarrow\{\mathrm{x,y}\},\mathrm{PlotRange}\rightarrow\{\{-2\pi,2\pi\},\{-2,2\}\}\right]$$

La gráfica es la siguiente:

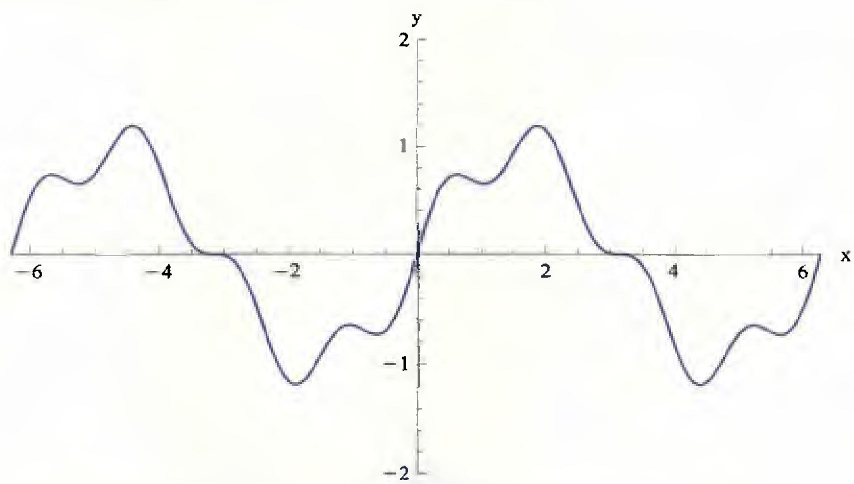

Figura 3.37: Suma de los dos primeros términos de la función de Riemann.

Para la función

$$f(x)=\sum_{n=1}^{5}\frac{Sen(n^2x)}{n^2},$$

Se tiene que la sintaxis utilizada en el programa es:

$$\text{Plot}[\sum_{n=1}^{5}\frac{Sen(n^2x)}{n^2},\{x,-2\pi,2\pi\},\text{AxesLabel}\to\{\text{"x"},\text{"y"}\},\text{PlotRange}$$
$$\to\{\{-2\pi,2\pi\},\{-2{,}2\}\}]$$

La gráfica es la siguiente:

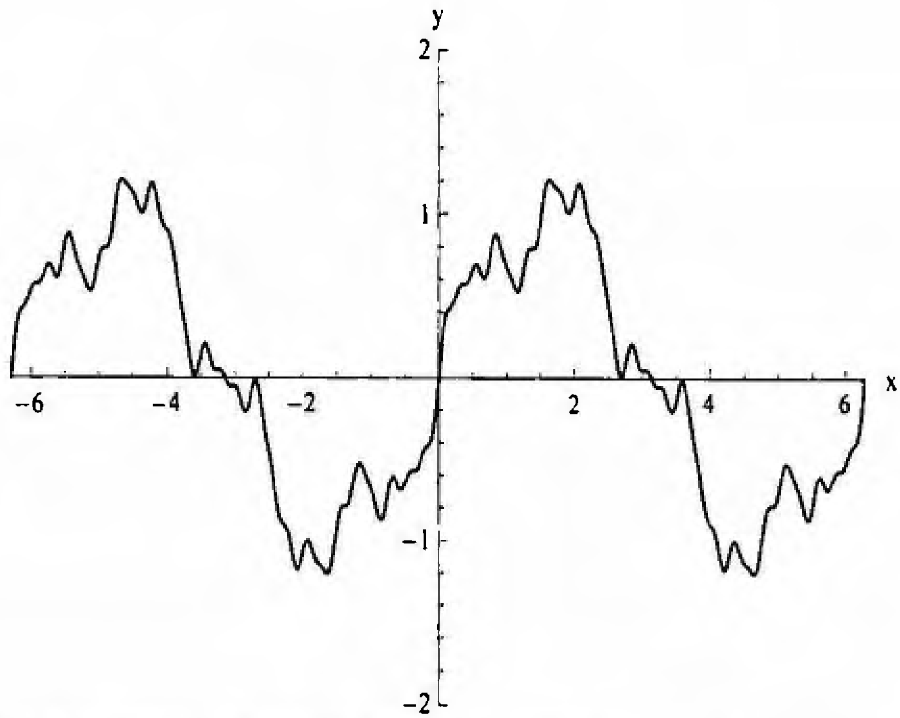

Figura 3.38: Suma de los cinco primeros términos de la función de Riemann.

Para la función

$$f(x)=\sum_{n=1}^{10}\frac{Sen(n^2x)}{n^2},$$

Se tiene la siguiente gráfica:

La sintaxis utilizada en el programa es:

$$\text{Plot}\left[\sum_{n=1}^{10}\frac{Sen(n^2*x)}{n^2},\{x,-2\pi,2\pi\},\text{AxesLabel}\to\{\text{"x"},\text{"y"}\},\text{PlotRange}\to\{\{-2\pi,2\pi\},\{-2,2\}\}\right]$$

La gráfica es la siguiente:

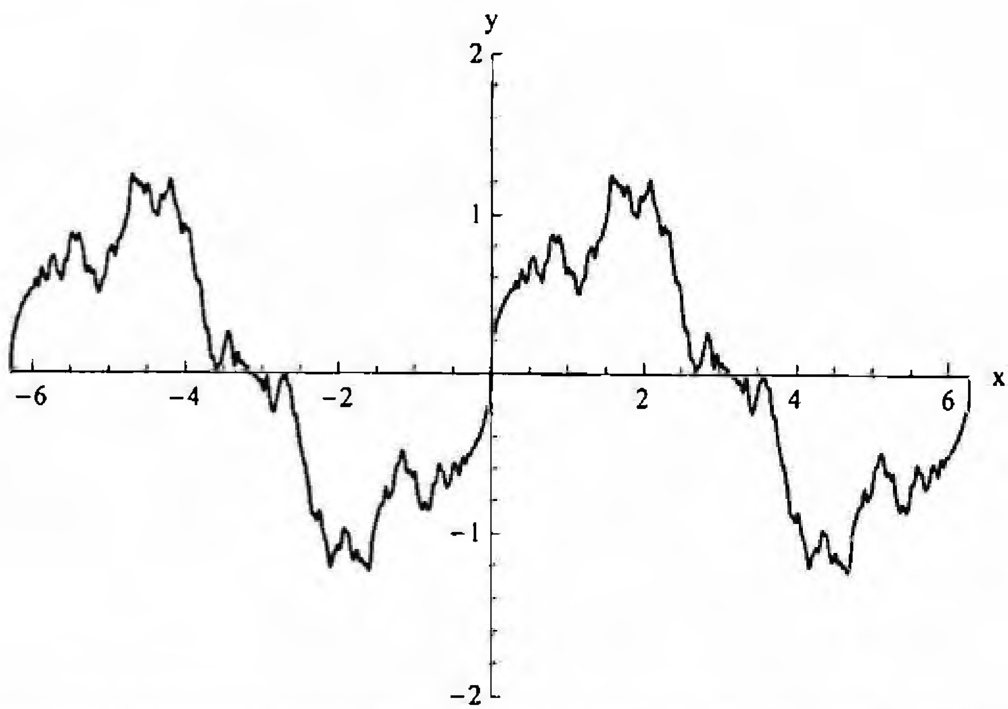

Figura 3.39: Suma de los diez primeros términos de la función de Riemann.

3.3.4.5 LA FUNCIÓN DE VAN DER WAERDEN CON *MATHEMATICA*.

En 1930 el matemático Holandés Van Der Waerden presenta una función continua en todo $\mathbb{R}$ y no diferenciable en punto alguno (Balaguer, 2009), la cual definió de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}\, dist(10^n x, \mathbb{Z})$$

donde $dist(10^n x, \mathbb{Z})$ es la distancia de $10^n x$ al entero mas cercano

Se interpreta, a continuación, como se define esta función, para ello se requiere explicitar la función distancia $dist(10^n x, \mathbb{Z})$ para cualquier entero k, como sigue

Sin pérdida de generalidad se supone que $k > 0$ y $10^n x \in [k-1,\ k]$, véase la siguiente figura

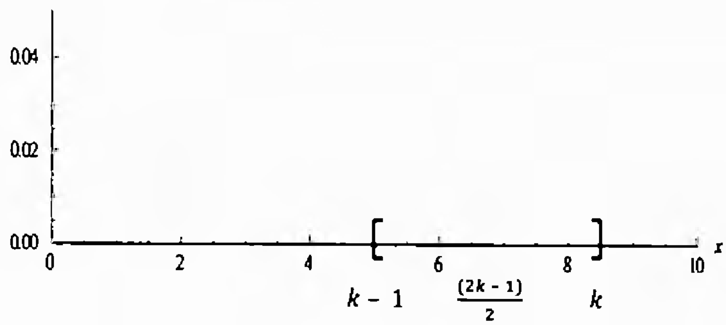

Figura 3 40 Intervalo real $[k-1, k]$

El punto medio del intervalo $[k-1,\ k]$ es $\frac{k\ +\ k\ -\ 1}{2} = \frac{2k\ -\ 1}{2}$, enseguida se analiza el valor de la función $dist(10^n x, \mathbb{Z})$ cuando $10^n\, x$ se ubica en algun punto de este intervalo

Si $10^n x = k - 1$, se tiene que

$$dist(10^n\, x, \mathbb{Z}) = 0$$

Si $10^n x = k$, se tiene que

$$dist(10^n\, x, \mathbb{Z}) = 0$$

Si $10^n x = \frac{2k\,-\,1}{2}$, se tiene que

$$dist(10^n\, x, \mathbb{Z}) = \frac{2k\ -\ 1}{2} - (k - 1)$$

$$dist(10^n\, x, \mathbb{Z}) = \frac{2k\ -\ 1\ -\ 2k\ +\ 2}{2}$$

$$dist(10^n\, x, \mathbb{Z}) = \frac{1}{2}, \text{ o lo mismo que}$$

$$dist(10^n\, x, \mathbb{Z}) = k - \frac{2k\ -\ 1}{2}$$

$$dist(10^n\, x, \mathbb{Z}) = \frac{2k\ -\ 2k + 1}{2} = \frac{1}{2},$$

Si $10^n\, x \ \in \left(k - 1, \frac{2k\ -\ 1}{2}\right)$, se tiene que

$$dist(10^n\, x\, , \mathbb{Z}) = 10^n\, x - (k - 1)$$

Si $10^n\, x \ \in \left(\frac{2k\ -\ 1}{2}\, , k\right)$, se tiene que

$$dist(10^n\, x\, , \mathbb{Z}) = k - 10^n\, x$$

Claramente la función $dist(10^n x, \mathbb{Z})$ se puede definir como sigue:

$$dist(10^n x, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 10^n x - (k-1), & \text{si } k - 1 \le 10^n x \le \dfrac{2k-1}{2} \\ k - 10^n x, & \text{si } \dfrac{2k-1}{2} \le 10^n x \le k \end{cases}$$

Para todo entero k , $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y $x \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, todo número real se puede escribir como el número $10^n a + z$ donde $z \in \mathbb{Z}$ y $0 \le a \le 1$, con esta consideración es claro que:

$$dist(10^n x, \mathbb{Z}) = dist(10^n[a + z])$$

$$= dist(10^n a) + dist(10^n z)$$

$$= dist(10^n a) + 0$$

$dist(10^n x, \mathbb{Z}) = dist(10^n a)$, para todo $0 \le a \le 1$, esto quiere decir que el comportamiento gráfico de la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} dist(10^n x, \mathbb{Z})$ en cualquier intervalo entre dos enteros consecutivos $[k - 1, k]$ es el mismo que en el intervalo $[0, 1]$, de esta forma la función de Van Der Waerden es una función periódica de periodo uno (1).

Nótese que en el intervalo $[0, 1]$ es $k = 1$, de manera que en tal caso se tiene:

$$dist(10^n x, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 10^n x, & \text{si } 0 \le 10^n x \le \frac{1}{2} \\ 1 - 10^n x, & \text{si } \dfrac{1}{2} \le 10^n x \le 1 \end{cases}$$

Para todo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y $x \in \mathbb{R}$.

Sea $u_n(x) = \frac{1}{10^n} dist(10^n x, \mathbb{Z})$, entonces

$$u_0(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Este es el primer término de la función de Van Der Waerden, su gráfica es

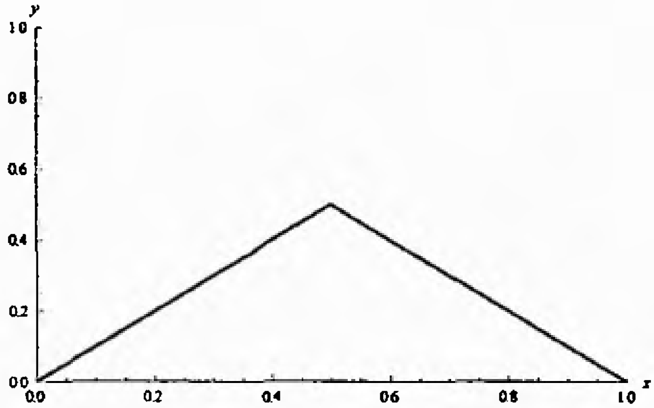

Figura 3.41 Primer término de la función de Van Der Waerden

El siguiente término de la función de Van Der Waerden, se obtiene

$$u_1(x) = \frac{1}{10} \begin{cases} 10x, & \text{si} \quad 0 \leq 10x \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - 10x, & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} \leq 10x \leq 1 \end{cases}$$

$$u_1(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{10} - x, & \text{si} \quad \dfrac{1}{20} \leq x \leq \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Es claro que la función $u_1(x)$ es una función periódica de período $\frac{1}{10}$, de manera que para poderla sumar con $u_0(x)$ se tiene que ampliar periódicamente para que cubra todo el intervalo $[0,1]$, de modo que se obtiene el siguiente resultado

$$u_1(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} - x, & \text{si } \frac{1}{20} \le x \le \frac{1}{10} \\ x - \frac{1}{10}, & \text{si } \frac{1}{10} \le x \le \frac{3}{20} \\ \frac{1}{5} - x, & \text{si } \frac{3}{20} \le x \le \frac{1}{5} \\ x - \frac{1}{5}, & \text{si } \frac{1}{5} \le x \le \frac{1}{4} \\ \frac{3}{10} - x, & \text{si } \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{10} \\ x - \frac{3}{10}, & \text{si } \frac{3}{10} \le x \le \frac{7}{20} \\ \frac{2}{5} - x, & \text{si } \frac{7}{20} \le x \le \frac{2}{5} \\ x - \frac{2}{5}, & \text{si } \frac{2}{5} \le x \le \frac{9}{20} \\ \frac{1}{2} - x, & \text{si } \frac{9}{20} \le x \le \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le \frac{11}{20} \\ \frac{3}{5} - x, & \text{si } \frac{11}{20} \le x \le \frac{3}{5} \\ x - \frac{3}{5}, & \text{si } \frac{3}{5} \le x \le \frac{13}{20} \\ \frac{7}{10} - x, & \text{si } \frac{13}{20} \le x \le \frac{7}{10} \\ x - \frac{7}{10}, & \text{si } \frac{7}{10} \le x \le \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} - x, & \text{si } \frac{3}{4} \le x \le \frac{4}{5} \\ x - \frac{4}{5}, & \text{si } \frac{4}{5} \le x \le \frac{17}{20} \\ \frac{9}{10} - x, & \text{si } \frac{17}{20} \le x \le \frac{9}{10} \\ x - \frac{9}{10}, & \text{si } \frac{9}{10} \le x \le \frac{19}{20} \\ 1 - x, & \text{si } \frac{19}{20} \le x \le 1 \end{cases}$$

La gráfica del segundo término $u_1(x)$ se muestra en la siguiente figura

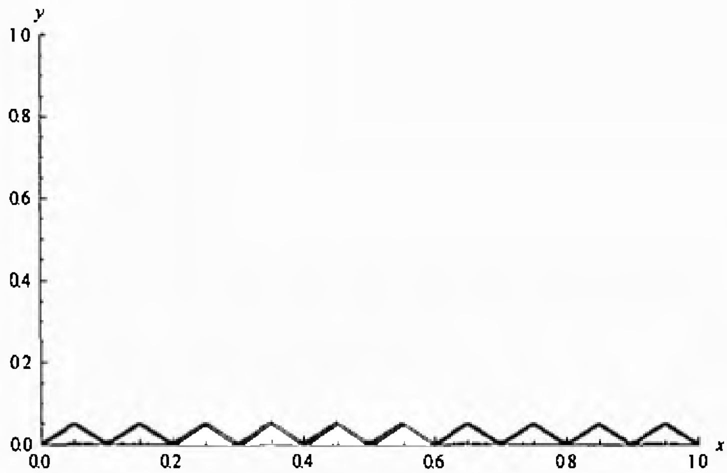

Figura 3 42· Segundo término de la función de Van Der Waerden

Si las gráficas de las figuras 3 41 y 3 42 se realizan en el mismo plano, se obtiene la siguiente gráfica

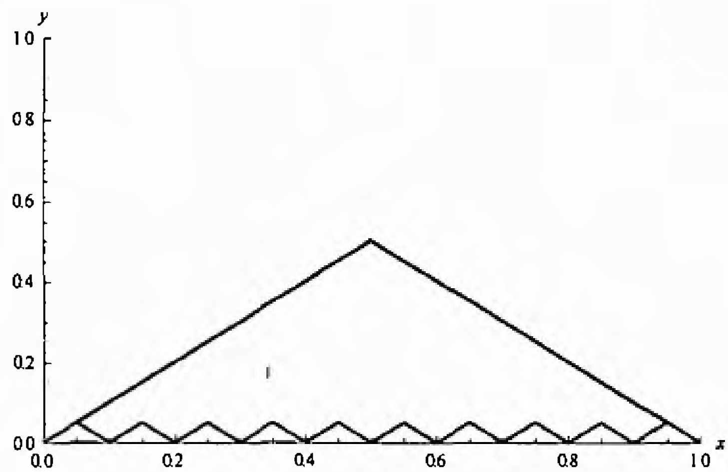

Figura3 43: Primer y segundo término de la función de Van Der Waerden

Las sumas parciales son $s_1(x) = u_0(x)$ y $s_2(x) = u_0(x) + u_1(x)$, de manera que

$$s_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10}, & \text{si } \frac{1}{20} \leq x \leq \frac{1}{10} \\ 2x - \frac{1}{10}, & \text{si } \frac{1}{10} \leq x \leq \frac{3}{20} \\ \frac{1}{5}, & \text{si } \frac{3}{20} \leq x \leq \frac{1}{5} \\ 2x - \frac{1}{5}, & \text{si } \frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{3}{10}, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{10} \\ 2x - \frac{3}{10}, & \text{si } \frac{3}{10} \leq x \leq \frac{7}{20} \\ \frac{2}{5}, & \text{si } \frac{7}{20} \leq x \leq \frac{2}{5} \\ 2x - \frac{2}{5}, & \text{si } \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{9}{20} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{9}{20} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{11}{20} \\ \frac{8}{5} - 2x, & \text{si } \frac{11}{20} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5}, & \text{si } \frac{3}{5} \leq x \leq \frac{13}{20} \\ \frac{17}{10} - 2x, & \text{si } \frac{13}{20} \leq x \leq \frac{7}{10} \\ \frac{3}{10}, & \text{si } \frac{7}{10} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{9}{5} - 2x, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5}, & \text{si } \frac{4}{5} \leq x \leq \frac{17}{20} \\ \frac{19}{10} - 2x, & \text{si } \frac{17}{20} \leq x \leq \frac{9}{10} \\ \frac{1}{10}, & \text{si } \frac{9}{10} \leq x \leq \frac{19}{20} \\ 2 - 2x, & \text{si } \frac{19}{20} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La gráfica de $s_2(x)$ se muestra en la siguiente figura.

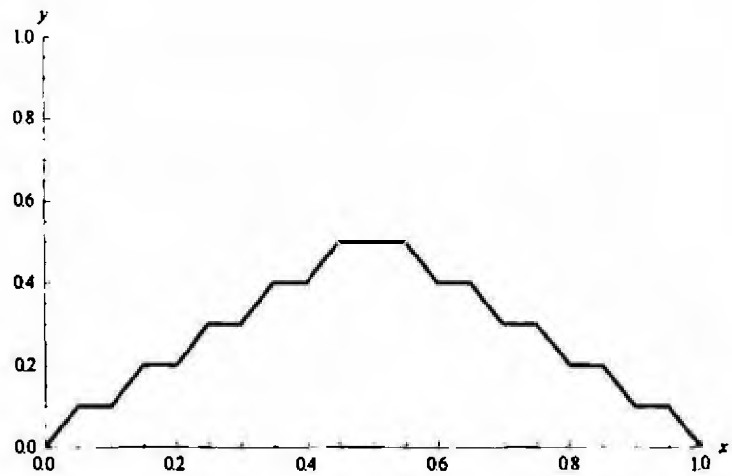

Figura 3.44: Suma de los dos primeros términos de Van Der Waerden.

La siguiente figura ilustra las gráficas de $s_1(x)$ y $s_2(x)$.

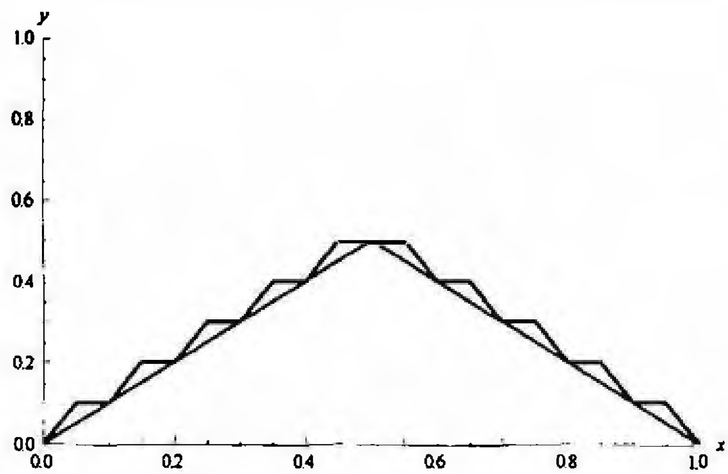

Figura 3.45: Primer término y Suma de los dos primeros términos de Van Der Waerden

Si se continúa obteniendo los términos de la sucesión de sumas parciales se obtendrán funciones con más cúspides las cuales convergen uniformemente

Ahora se puede redefinir la función de Van Der Waerden en la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \varphi(10^n x),$$

donde

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ y } \varphi(x) = \varphi(x+1),$$

es una función periódica

La función de Van Der Waerden es central en el estudio de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, ya que, por ejemplo, si se sustituye el diez (10) por dos (2) se obtiene la función de Takagi (1903), la cual fue analizada en la seccion 3 3 3

Se reitera que la función de Van Der Waerden de 1930 se definió como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} dist(10^n x, \mathbb{Z}),$$

donde $dist(10^n x, \mathbb{Z})$ es la distancia de $10^n x$ al entero más cercano

Se ha visto que si $x \in \mathbb{R}$, entonces este numero puede ser escrito en la forma $x = N + a$ donde $n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq a \leq 1$, de manera que

$$dist(10^n\, x, \mathbb{Z}) = dist[10^n(N + a)\mathbb{Z}]$$

$$= dist[(10^n N + 10^n a)\mathbb{Z}]$$

$$= dist(10^n N, \mathbb{Z}) + dist(10^n a, \mathbb{Z})$$

$$= 0 + dist(10^n a, \mathbb{Z})$$

$$dist(10^n\, x, \mathbb{Z}) = dist(10^n a, \mathbb{Z})$$

Esto quiere decir que la distancia $dist(10^n\, x, \mathbb{Z})$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ puede ser interpretada como la distancia $dist(10^n\, a, \mathbb{Z})$ para $a \in \mathbb{R}$ y $0 \le a \le 1$

Nótese que 10^n es un entero positivo y al ser $0 \le a \le 1$, se tiene que $10^n\, a$ tendra una parte entera y otra parte decimal, la parte entera de este número se llamará M y su nueva parte decimal será denotada por $a, a_{n+1}\, a_{n+2}\, a_{n+3} \quad a_m$ donde el desarrollo decimal de a es $a = 0, a_1 a_2 a_3$ y m, n son enteros positivos, con estas consideraciones $10^n a$ puede ser escrito como

$$10^n a = M + 0, a_{n+1}\, a_{n+2}\, a_{n+3} \quad a_m$$

Por ejemplo, sea $a = 0{,}4527123$, se tiene que $10^2 a = 45 + 0{,}27123$ esto significa que $n = 2$, $M = 45$, $a_{n+1} = 2$, $a_{n+2} = 7$, $a_{n+3} = 1$, $a_{n+4} = 2$, $a_{n+5} = 3 = a_m$, de donde tenemos que

$$m = n + 5$$

$$m = 2 + 5$$

$$m = 7$$

Tomemos $10^{-m} = 10^{-7} = 0\,0000001$, de modo que

$$10^2(a + 10^{-7}) = 10^2a + 10^{-5}$$

$$= 45 + 0{,}27123 \quad + 0{,}00001$$

$$= 45 + 0{,}27124$$

$$10^2(a + 10^{-7}) = 45 + 0{,}2712(3 + 1)$$, significa que

$$10^n(a + 10^{-m}) = M + 0, a_{n+1}\, a_{n+2}\, a_{n+3} \quad (a_m + 1)$$

Aquí, cabe señalar que

$$10^2(a + 10^{-7}) - 10^2a = 45 + 0{,}27123 \quad + 0{,}00001$$

$$= -(45 + 0{,}27123)$$

$$= \cancel{45} + \cancel{0{,}27123} \quad + 0{,}00001 - \cancel{45} - \cancel{0{,}27123}$$

$$= 0{,}00001$$

$$= 10^{-5}$$

Nótese que

$$10^2(a + 10^{-7}) - 10^2a = 10^{2-7}$$

Por otro lado, supongase que $a_m = 9$ y que el número dado es $0{,}4527129$, entonces se tiene que

$$10^2(a-10^{-7}) = 10^2a - 10^{-5}$$

$$= 45 + 0{,}27123 \quad - 0{,}00001$$

$$= 45 + 0{,}27128$$

$$10^2(a-10^{-7}) = 45 + 0{,}2712(9-1) \quad \text{, es decir,}$$

$$10^n(a-10^{-m}) = M + 0\,,a_{n+1}\,a_{n+2}\,a_{n+3} \quad (a_m - 1)$$

Se puede concluir parcialmente que,

$$10^n(a \pm 10^{-m}) = M + 0\,,a_{n+1}\,a_{n+2}\,a_{n+3} \quad (a_m \pm 1)$$

TEOREMA 3.1. La función de Van Der Waerden $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}dist\left(10^n x,\mathbb{Z}\right)$, donde $dist(10^n x,\mathbb{Z})$ es la distancia de $10^n x$ al entero más cercano, es continua y no diferenciable en punto alguno

Demostración

Se prueba primero que la funcion de Van Der Waerden es continua, para ello sea $f_n(x)=\frac{1}{10^n}dist\left(10^n x,\mathbb{Z}\right)$, para cada numero entero positivo $n \in \mathbb{Z}^+$, como $|dist(10^n x,\mathbb{Z})| \leq 1$, se tiene que

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{10^n}\ dist(10^n x,\mathbb{Z})\right|$$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{10^n}\,|\ dist(10^n x,\mathbb{Z})| \leq \frac{1}{10^n},$$

Es decir,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{10^n}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Y como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ converge. Así pues, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente, al ser cada f_n continua, se asegura que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}\, dist(10^n x, \mathbb{Z}),$$

es también continua.

Ahora se prueba que para todo a, la función f no es derivable, es decir, $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ no existe.

Para ello, se toma una sucesión particular $\{h_m\}$ que tiende a cero cuando $m \to \infty$, tal sucesión se define por

$$h_m = \begin{cases} 10^{-m}, & \text{si } h_m \neq 4 \text{ ó } 9 \\ -10^{-m}, & \text{si } h_m = 4 \text{ ó } 9 \end{cases}$$

Por consiguiente, la demostración es equivalente a probar que $\lim_{m \to \infty} \frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$, no existe.

Se analizara el comportamiento de la sucesión de cocientes $\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$

En efecto,

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}dist\left[10^n(a+h_m),\mathbb{Z}\right]-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}dist\left(10^n a,\mathbb{Z}\right)}{\pm 10^{-m}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{10^n\left(\pm 10^{-m}\right)}\left[dist\left(10^n(a+h_m),\mathbb{Z}\right)-dist\left(10^n a,\mathbb{Z}\right)\right]\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pm 10^{n-m}}\left[dist\left(10^n(a+h_m),\mathbb{Z}\right)-dist\left(10^n a,\mathbb{Z}\right)\right]\right\}$$

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}=\sum_{n=0}^{\infty}\pm 10^{m-n}\,dist\left[10^n(a+h_m),\mathbb{Z}\right]-dist\left(10^n a,\mathbb{Z}\right)$$

Observe que el valor que toma la expresión $dist\left[10^n(a+h_m),\mathbb{Z}\right]-dist\left(10^n a,\mathbb{Z}\right)$ al comparar los numeros enteros m y n, así

Si $n\geq m$, se tiene que

$$10^n h_m=10^n\left(\pm 10^{-m}\right)$$

$10^n h_m=10^{n-m}$, de donde, al ser $n-m$ un entero positivo, se sigue que $10^n h_m$ es entero, por lo tanto

$$dist\left[10^n(a+h_m),\mathbb{Z}\right]-dist\left(10^n a,\mathbb{Z}\right)=dist\left(10^n a,\mathbb{Z}\right)+dist\left(10^n h_m,\mathbb{Z}\right)-dist\left(10^n a,\mathbb{Z}\right)$$

$$=0+0-0$$

$$dist\left[10^n(a+h_m),\mathbb{Z}\right]-dist\left(10^n a,\mathbb{Z}\right)=0$$

De manera que cuando $n \geq m$, se tiene

$$dist\left[10^n(a+h_m),\mathbb{Z}\right]-dist\left(10^n a,\mathbb{Z}\right)=0$$

Si $n \leq m$, se tiene que

Supóngase que $0,a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \quad a_m \quad \leq \frac{1}{2}$, entonces también se tiene que $0,a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \quad (a_m \pm 1) \quad \leq \frac{1}{2}$, aquí se toma $h_m=-10^{-m}$ en el caso especial $n+1=m$ y $a_m=4$, esto significa que $dist\left[10^n(a+h_m),\mathbb{Z}\right]-dist\left(10^n a,\mathbb{Z}\right)=\pm 10^{n-m}$, ya que $n-m<0$ y $10^{n-m} \leq \frac{1}{2}$

Con este resultado, se tiene

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}=\sum_{n=0}^{\infty}\pm 10^{m-n}\left[\pm 10^{n-m}\right]$$

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1).$$

Por consiguiente, $\dfrac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$ es la suma de $m-1$ números, cada uno de los cuales es ± 1 Al sumar ahora $+1$ ó -1 a un número se cambia la paridad del mismo La suma de $m-1$ numeros cada uno de ellos igual a $+1$ ó -1 es un entero par si m es impar, e impar si m es par En consecuencia, la sucesión de cocientes no converge, puesto que es una sucesión de enteros pares e impares alternados

En conclusión $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$, no existe ■

En lo que sigue se analiza otro tipo de función de Van Der Waerden, tal función se define como sigue

$$f(x) = |x| \ , \ f(x+2) = f(x) \ , -1 \le x \le 1$$

Esta función se obtiene periódicamente a partir de la función valor absoluto e implementandole a esta funcion una periodicidad de dos (2)

Ahora, con el *Software Mathematica* se debe utilizar la siguiente sintaxis para la construcción de su gráfico, definiendo inicialmente la funcion condicional como sigue

$$f[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Which}[-2 \le x \le -1, x+2, -1 \le x \le 0, -x, 0 \le x \le 1, x, 1 \le x \le 2, 2-x]$$

Luego, se utiliza la siguiente sintaxis para ver su gráfica

$$\mathrm{Plot}[f[x], \{x, -2,2\}, \mathrm{AxesLabel} \to \{x, y\}, \mathrm{PlotRange} \to \{\{-2,2\}, \{0,2\}\}, \mathrm{PlotStyle} \to \mathrm{Thickness}[0\ 005]]$$

La siguiente figura muestra la gráfica de esta función

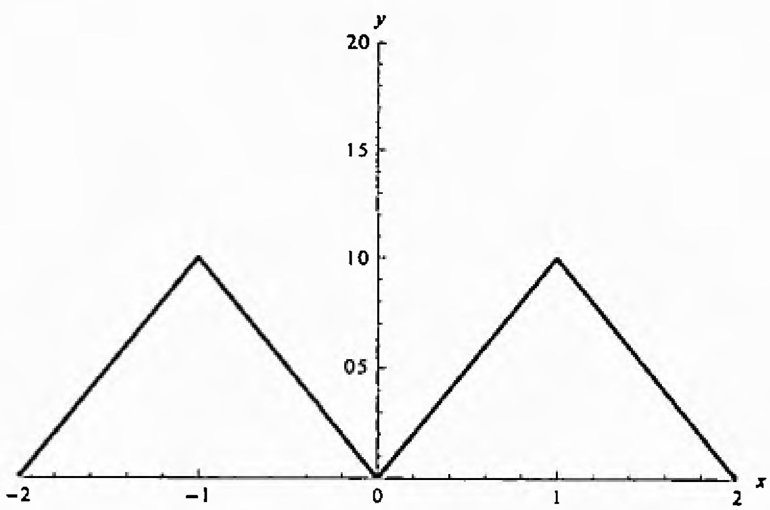

Figura 3 46. La función de Van Der Waerden de periodicidad dos.

La serie que define la función de Van Der Waerden es la siguiente:

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n f(4^n x)$$

Realmente, la función V define la función continua y no diferenciable en punto alguno de Van Der Waerden, esta función se define por medio de la serie convergente $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ y la función valor absoluto periódica $f(4^n x)$.

Las siguientes figuras muestran algunos términos de esta función.

Para construir la gráfica de la función $V(x)=\sum_{n=0}^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^n f(4^n x)$, se utiliza la siguiente sintaxis:

$$\text{Plot}\left[\sum_{n=0}^{1}(\tfrac{3}{4})^n f[4^n x], \{x,-3,3\}, \text{AxesLabel} \to \{x,y\}, \text{PlotRange} \to \{\{-4,4\},\{-0.2,1.5\}\}\right]$$

La gráfica se muestra en la siguiente figura.

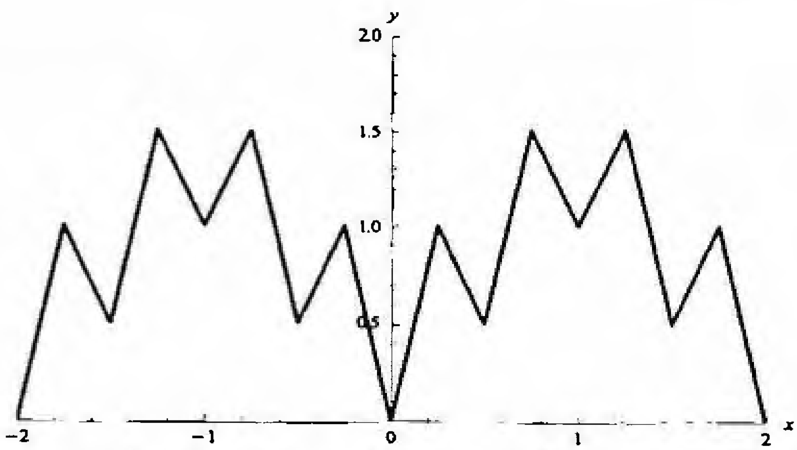

Figura 3.47: Suma de los dos primeros términos de la función de Van Der Waerden de periodicidad dos.

Para construir la gráfica de la función

$$V(x)=\sum_{n=0}^{2}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n} f(4^{n}x),$$

Se utiliza la siguiente sintaxis:

$$\text{Plot}\left[\sum_{n=0}^{2}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n} f[4^{n}x]\,,\{x,-2,2\},\text{AxesLabel}\to\{x,y\},\text{PlotRange}\to\{\{-2,2\},\{0,2.2\}\},\text{PlotStyle}\to\text{Thickness}[0.005]\right]$$

La gráfica se muestra en la siguiente figura.

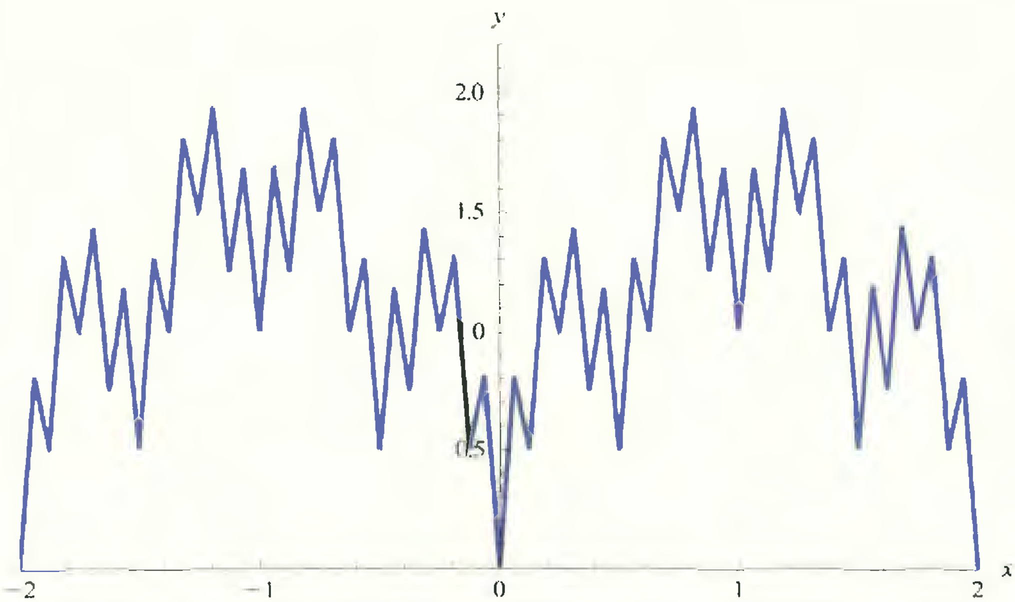

Figura 3.48: Suma de los tres primeros términos de la función de Van Der Waerden de periodicidad dos.

Para construir la gráfica de la función

$$V(x)=\sum_{n=0}^{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n} f(4^{n} x)$$

Se utiliza la siguiente sintaxis

$$\text{Plot}\left[\sum_{n=0}^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} f[4^{n}x], \{x,-3,3\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{x,y\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{-4,4\},\{-0\ 2,1\ 5\}\}\right]$$

Nótese que a medida que se aumenta la cantidad de términos de la función de Van Der Waerden van aumentando la cantidad de cuspides en la gráfica

Éste movimiento se debe a que la gráfica se está repitiendo periódicamente, pero en intervalos de menor diámetro Si se desean ver todas las cúspides hasta el intervalo desde $(-2,2)$ entonces se tendrían que aumentar la penodicidad de la funcion $f(x)$ que se ha definido condicionalmente

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se presentan, a continuación, los aspectos más relevantes derivados del presente trabajo investigativo

- ✓ Los primeros rasgos del concepto de continuidad fueron de tipo intuitivo hasta llegar a adquirir un carácter topológico Sin embargo, pasó por caracterizaciones del tipo geométrica y numérica en el intermedio de su desarrollo y evolución, esta ruta de nacimiento de este concepto tuvo significativas consecuencias en la comprension de las funciones continuas y no diferenciables en punto alguno

- ✓ El desarrollo y evolución del concepto de función afectó significativamente la aparición de la continuidad de una función, en primer lugar por el lento proceso de formalización de una definición de función, en segundo lugar porque las funciones fueron consideradas por mucho tiempo como relaciones continuas, quedando inmerso la diferenciación de expresiones puramente continuas y, de hecho, para algunos historiadores la existencia de la derivada era indudable

- ✓ No se sabe con seguridad en que epoca o periodo de la historia de la Matemática el concepto de continuidad se desprende del de función, pero lo que si es cierto es que los primeros en formular definiciones formales del concepto de continuidad fueron Bolzano y Cauchy

- ✓ Didácticamente no es recomendable estudiar la continuidad divorciada de la diferenciación y de la integración, porque de ser asi no tendria sentido hablar de la existencia o no de éstas dos operaciones

- ✓ Existen un gran numero de resultados o teoremas que sin la condición de continuidad no es posible su formulación

- ✓ La diferenciabilidad implica la continuidad, sin embargo, la continuidad no implica la diferenciabilidad

- ✓ La intuición natural que puede tener un matemático es que si una función es continua en todos los numeros reales ella debe ser derivable, pero con esta investigación se elimina esta forma errónea de pensamiento, puesto que se ha probado la existencia de funciones continuas que no poseen derivadas en punto alguno

- ✓ A pesar de que Bolzano y Riemann fueron los primeros matemáticos en proponer ejemplos de funciones continuas y no diferenciables en punto alguno, el mérito mayormente se lo lleva Weierstrass, ya que fue el primero en probar esta conjetura

- ✓ Se recomienda el uso del Software Matemática para apoyar la enseñanza de las funciones continuas no diferenciables, de manera tal que se pueda hablar de las Funciones Continuas y no Diferenciables en punto alguno con *Mathematica*

- ✓ Si grandes matemáticos en la historia de la evolución de las relaciones continuidad – diferenciabilidad pensaron que si una función era continua entonces ella debería ser derivable en algunos puntos, que se espera de nuestros estudiantes que están en formación

  Por esta razón, se recomienda que finalizada la formación de un licenciado en matemática éste debe tener clara la situación de la no existencia de la derivada para las funciones continuas, de modo que esta base académica le pueda servir para profundizar el asunto en su formación de postgrado

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALAGUER, J , (2009) ***Funciones Patológicas. Funciones continuas no diferenciables en punto alguno*** Editorial Murcia

BARTLE, R G & SHERBERT, D R , (1989) ***Introducción al Análisis Matemático de una Variable*** Editorial Limusa Impreso en México

BARTLE, R G & SHERBERT, D R , (1992) ***Introducción al Análisis Matemático.*** Editorial Limusa Impreso en México

BOAS, R P , (1960) ***A Primer of Real Functions*** Carus Monograph Number 13, Math Assoc Amer

BOYER, C , (2010) ***Historia de la Matemática*** Carta reimpresión Ciencia y Tecnología Alianza Editorial Impreso en España

BURDEN, R y DOUGLAS FAIRES, J (2013) ***Análisis Numérico*** Cengage Leaning Novena Edición México

BRITO, W (2011) ***El Teorema de Categoría de Baire y Aplicaciones*** Editado por el consejo de Publicaciones de la Universidad de los Andes Mérida, Venezuela

CAMARENA, J A (2014) ***Funciones Patológicas: Clase de Funciones Continuas no Diferenciables*** Monografía Universidad de Panamá, Panamá Primera Edicion en Marzo de 2014

CASCALES, B & TROYANSKI, S (2007) ***Fundamentos de Análisis Matemático*** Universidad de Murcia

COLLETE, J P , (1986) ***Historia de las Matemáticas*** Segunda edición, Tomo II Siglo XXI Editores

DELGADILLO, G & LÓPEZ, M , (2008) Funciones continua y nunca derivable ***Revista de Ciencias Básicas UJAT***, Volumen 7, numero 1

DENCE, J & DENCE T , (2010) ***Advanced Calculus. A Transition to Analysis*** Elsevier Amsterdam

DE SOUZA, P & SILVA, J , (2004) ***Berkeley Problems in Mathematics*** Printed in the United States of America Springer

ENGELKING, R , (1989) ***General Topology*** Heldermann Verlag, Berlin

GRABINSKY, G , (1997) ***La Función Continua no Diferenciable de Weierstrass*** Departamento de Matemática Instituto Tecnológico Autónomo de México

HAIRER, E & WANNER, G , (2008) ***Analysıs by Its History. Springer*** New York

IOMMI, G , (2011) ***Funcıones Continuas con Máxımos Locales Densos*** Proyecto Fondecyt

KREYSZIG, E (1993) ***Advanced Engineering Mathematıcs*** Seventh Editıon John Wıley & sons, INC Prınted ın the Unıted States of Amerıca

KUMARESAN, S (2005) ***Topology of Metric Spaces*** Alpha Scıence Internatıonal Ltd Harrow, U K Impreso en Indıa

MACHO STADLER M , (2007) ***Topología de Espacıos Métrıcos*** Departamento de matemátıca Unıversıdad del País Vasco, Managua

MARGALEF ROIG, J , (1980) ***Topología*** Alhambra T 2, Madrıd

MARTÍNEZ, A, U (2006) ***Cuestıones de la Aritmética y del Análisis Armónico*** Departamento de Matemátıca Unıversıdad Autónoma de Madrıd, España Tesıs Doctoral

MEDVEDEV, F A (1991) ***Scenes from the History of Real Functıons*** Bırkhauser Verlag Basel

MUNKRES, J R , (2002) ***Topología*** Prentıce Hall, Madrıd

SCHINAZI, R , (2012) ***From Calculus to Analysis*** Unıversıty of Colorado Bırkhauser

SEARCÓID, M (2007) ***Metric Spaces*** Sprınger Undergraduate Mathematıcs Serıes Prınted ın the Unıted States of Amerıca

SPIVAK, M , (1980) ***Calculus*** Segunda edıcıón Ed Publısh or Perısh Berkeley C A

TITCHMARSH, E C (1939) ***The Theory of Functions*** Oxford Unıversıty Press Second Editıon

TKACHUK, V , (1999) ***Curso básico de topología general*** U A M Iztapalapa, Méxıco D F

WHITE, A J , (1973) ***Introduccıón al Análısıs Real*** Edıcıones de Promocıón Cultural S A Barcelona, España